

ASCH

GRUNDLAGEN DER ANALYSIS

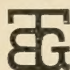


GRUNDLAGEN DER ANALYSIS

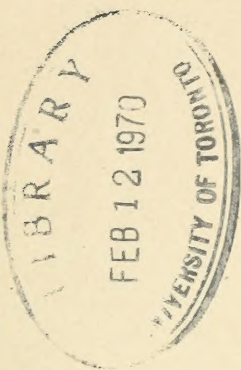
VON

MORITZ PASCH

AUSGEARBEITET UNTER MITWIRKUNG VON CLEMENS THAER



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909


LIBRARY
FEB 12 1970
UNIVERSITY OF TORONTO

Vorwort.

Die Wissenschaft kann nicht vorwärtsschreiten, ohne immer wieder rückwärts zu blicken und ihren Aufbau mit neuem Verständnis und in neuer Absicht zu betrachten. Bei dem Aufbau der Mathematik birgt jede Nichtbeachtung eines noch so unerheblich scheinenden Umstandes eine Gefahr für den weiteren Gang. Dennoch sind zahlreiche Fehler lange unbemerkt oder unberücksichtigt geblieben, bis eine Störung, gegen die man sich nicht verschließen konnte, als Wirkung zurückliegender Unterlassungen erkannt wurde. Erst allmählich hat sich die planmäßige Durchforschung des Aufbaus von den Anfängen an zu einem ansehnlichen Bestandteil der mathematischen Arbeit entwickelt.

Für das Gebiet der Geometrie wurde das Bedürfnis nach folgerichtiger Darstellung früher und allgemeiner empfunden und ausgiebiger befriedigt, als für das Gebiet der Analysis. Während aber die Analysis unabhängig dasteht, müssen in der Geometrie die Begriffe der Analysis vorausgesetzt werden. Die Stellungnahme gegenüber der Analysis muß daher auf die Stellungnahme gegenüber der Geometrie entscheidenden Einfluß üben und gewinnt durch diesen Umstand an Wichtigkeit.

Die Zahl der Versuche, die Analysis auf sichere Grundlagen zu stellen, ist nicht gering. Man darf zugeben, daß auch hier verschiedene Wege zu einem Ergebnis führen können. Aber als unumgängliches Erfordernis muß in jedem Fall festgehalten werden, daß keine Lücke gelassen, gleichsam in jeden Winkel hineingeleuchtet wird. Der Überzeugung, daß in dieser Richtung weitere Versuche berechtigt, ja notwendig sind, verdanken die folgenden Blätter ihre Entstehung. Wenn der Verfasser in der bezeichneten Richtung über das bisher Erreichte hinausgelangt zu sein glaubt, so darf er doch nicht hoffen, die so schwierige Aufgabe gelöst zu haben; er wird befriedigt sein, wenn seine Darstellung die Lösung fördert, besonders

dadurch, daß sie die Punkte, auf die es ankommt, möglichst ohne Ausnahme zutage treten läßt.

Wo alles davon abhängt, daß nichts übersehen wird und das Gewollte zu schärfstem Ausdruck kommt, ist die Kontrolle durch fremde Augen wertvoll, vielleicht unentbehrlich. Als daher einer meiner Zuhörer bei einer Folge von Vorlesungen, die die Herausgabe dieses Werkes vorbereiten sollten, Herr Clemens Thaer, reges Interesse für den Gegenstand und für die Art der Behandlung zeigte, machte ich ihm den Vorschlag, mich bei der Ausarbeitung des Werkes in der Weise zu unterstützen, daß der Stoff vor der Feststellung des Wortlauts jedesmal eingehend, unter rückhaltloser Kritisierung durchgesprochen würde. Herr Thaer ging auf meinen Vorschlag ein, und ich freue mich, hier aussprechen zu können, daß er mir der geeignete Arbeitsgenosse war und der Sache selbst wertvolle Dienste geleistet hat.

Die Ausarbeitung begann im September 1904, mußte aber mehrmals für längere Zeit unterbrochen werden, namentlich, als Herr Thaer im Herbst 1906 nach seiner Promotion unsre Universität verließ und nur noch während der Ferien zur Verfügung stand.

Gießen, Silvester 1907.

M. Pasch.

Inhaltsverzeichnis.

Anhang.

Auszüge aus früheren Schriften des Verfassers.

§ 1. Dinge und Namen.

1. Als Ding gilt zunächst nur Wahrgenommenes oder Wahrnehmbares. Ein dem Ding und nur ihm zukommender Name heißt Eigenname des Dinges. Unter einer Angabe des Dinges verstehen wir eine Bezeichnung des Dinges mit einem Eigennamen oder einen anderen Hinweis auf das Ding.

Jedem Ding können Eigennamen erteilt werden. Sind einem Ding ein oder mehrere Eigennamen erteilt, so können ihm noch andere erteilt werden.

Name und Angabe sind selbst Dinge.

2. Ein Name kann Name verschiedener Dinge sein; ein solcher heiße ein Gemeinname. Ist ein Gemeinname eingeführt oder sind gleichbedeutende Gemeinnamen eingeführt, so können noch andere damit gleichbedeutende eingeführt werden.

Sind Dinge angegeben, so kann ein Gemeinname eingeführt werden, der allen oder einigen zukommt, aber nicht anderen.

3. Auf dem Wege der Definition kann ein Hauptwort (D), das nicht Eigenname eines Dinges in dem bis dahin gültigen Sinn ist, mit der Wirkung eingeführt werden, daß es ganz so behandelt werden darf, als wäre es Eigenname eines Dinges (des Dinges D). Die Definition (implizite Definition) muß angeben, in welchen Aussagen zunächst das Wort gebraucht werden darf, und was solche Aussagen bedeuten sollen.

Das Ding angeben, heißt in diesem Fall: es mit seinem Eigennamen bezeichnen.

Daß implizite Definitionen nicht zu falschen oder bedeutungslosen Folgerungen führen, ergibt sich aus dem Wesen des mathematischen Beweises (s. Anh. zu § 2).

Beispiel. — Es seien A, B, P Eigennamen von Punkten, S Gemeinname der geraden Strecken, die die Punkte A und B*) enthalten. Dann können wir folgende Definition aufstellen:

*) Genauer: die Punkte mit den Namen A und B.

Mit der Aussage: „Der Punkt P liegt auf einer Strecke S“, soll gleichbedeutend sein die Aussage: „der Punkt P liegt auf dem Ding D“. Wir nennen das Ding D eine Gerade, und zwar: die Gerade der Punkte A und B.

4. Sind die Eigennamen a und b gleichbedeutend, ebenso die Eigennamen b und c, so sind es auch die Eigennamen a und c. Denn diese sind dann Eigennamen des Dinges b.

Die Gemeinnamen A und B sind gleichbedeutend, heißt: jedes Ding A ist ein B, jedes B ein A. Sind daher A und B gleichbedeutende Gemeinnamen, ebenso B und C, so sind es auch A und C. Denn dann ist jedes A ein B, jedes B ein C; jedes C ein B, jedes B ein A; folglich ist jedes A ein C, jedes C ein A.

Es gibt keine allgemeine Vorschrift für die Entscheidung, ob ein Eigenname mit einem anderen gleichbedeutend ist, oder ein Gemeinname mit einem anderen, ob ein Gemeinname einem Ding zukommt, ob ein Gemeinname zugleich mit einem anderen einem Ding zukommen kann, ob der durch eine Definition eingeführte Begriff sich mit dem durch eine andere eingeführten deckt.

Im folgenden werden Begriffe eingeführt, die zum Begriff der Zahl führen sollen und bei der Handhabung der Zahlen gebraucht werden. Diese Begriffe und die aus ihnen abgeleiteten nennen wir arithmetische. Die Beziehungen zwischen ihnen bilden den Gegenstand der Arithmetik (Zahlenlehre), die auch Analysis heißt zur Unterscheidung von der Arithmetik im engeren Sinn (Lehre von den ganzen, überhaupt den rationalen Zahlen). Die Analysis ist ein Teil der Mathematik, und zwar der Teil, der die anderen Teile nicht voraussetzt.

§ 2. Früher und später.

Grundsatz 1. Ist a Angabe eines Dinges, b ebenfalls, b von a verschieden, so ist entweder a früher als b, oder b früher als a, und zwar schließt jede dieser Möglichkeiten die andere aus.

Definition 1. Ist a früher als b, so heißt b später als a.

Statt: die Angabe *a* ist früher als die Angabe *b*, sagt man auch: *a* ist vor *b* geschehen (liegt vor *b*), *b* nach *a*; *a* geht *b* voran, *b* folgt auf *a*.

Grds. 2. Sind Dinge angegeben, so kann nach diesen Angaben ein von diesen Dingen verschiedenes Ding angegeben werden.

Grds. 3. Sind Angaben *A* von Dingen oder eines Dinges geschehen, so ist eines der *A* früher als jedes andere, eines später als jedes andere.

Def. 2. Jenes *A* heißt frühestes, erstes, dieses heißt spätestes, letztes.

Lehrsatz 1. Nur eines der *A* ist frühestes, nur eines ist spätestes.

Beweis. — Es sei *a* erstes der *A*, *b* ein anderes *A*; dann ist *a* früher als *b*, folglich (Grds. 1) *b* nicht früher als a, folglich nicht früher als jedes andere *A*, d. h. nicht erstes. Entsprechend wird der zweite Teil bewiesen.

Lehrs. 2. Erstes und letztes der *A* sind verschieden.

Bew. — Es sei wieder *a* erstes der *A*, und *b* ein anderes *A*, also *a* früher als *b*. Wäre *a* auch letztes, so wäre *a* auch später als *b*, was gegen Grds. 1 verstößt.

Lehrs. 3. Ist die Angabe *a* früher als die Angabe *b*, diese früher als *c*, so ist *a* früher als *c*.

Bew. — Da (Grds. 1) *b* nicht früher als *a*, *c* nicht früher als *b*, so ist hier weder *b* noch *c* erstes; nun muß aber (Grds. 3) eine der Angaben *a*, *b*, *c* erste sein; folglich ist *a* erste, d. h. *a* auch früher als *c*.

Def. 3. Liegt *a* vor *b* und *b* vor *c*, oder *c* vor *b* und *b* vor *a*, so sagt man: *b* liegt zwischen *a* und *c*. Man darf auch sagen: zwischen *c* und *a*.

Lehrs. 4. Sind *a*, *b*, *c* Angaben *A*, und liegt *b* zwischen *a* und *c*, so ist *b* weder erstes noch letztes der *A*. Oder: Ist *b* erstes oder letztes der *A*, so liegt *b* nicht zwischen *a* und *c*.

Lehrs. 5. Ist *B* Gemeinname nur für *a*, *b*, *c*, und liegt *b* zwischen *a* und *c*, so ist unter den *B* entweder *a* erstes und *c* letztes, oder *c* erstes und *a* letztes.

Bew. — Sei etwa *a* früher als *b*, *b* früher als *c*; dann ist (Lehrs. 3) *a* auch früher als *c*, und (Def. 1) *c* später als *a* und *b*, folglich (Def. 2) *a* erstes und *c* letztes der *B*.

Lehrs. 6. Ist b weder erstes noch letztes der B, so liegt b zwischen a und c.

Bew. — b liegt entweder vor a oder nach a (Grds. 1). Liegt b etwa vor a, so liegt b nicht vor c (Def. 2), sondern (Grds. 1) c vor b; folglich (Def. 3) liegt b zwischen a und c.

Lehrs. 7. Liegt b zwischen a und c, so liegt a nicht zwischen b und c, c nicht zwischen a und b.

Bew. — Liegt b zwischen a und c, so ist (Lehrs. 5) a erstes oder letztes der B, also (Lehrs. 4) a nicht zwischen b und c, ebensowenig c zwischen a und b.

Lehrs. 8. Von den Angaben B liegt entweder a zwischen b und c, oder b zwischen c und a, oder c zwischen a und b.

Bew. — Es sei etwa (Grds. 3) a erstes und (Lehrs. 2) c letztes der B; dann ist (Lehrs. 1) b weder erstes noch letztes: folglich (Lehrs. 6) liegt b zwischen a und c.

Lehrs. 9. Sind a, b, c, d Angaben von Dingen, c zwischen a und b (etwa a vor c, c vor b), d zwischen a und c oder zwischen b und c, so liegt d auch zwischen a und b.

Sind a, b, c, d, e Angaben von Dingen, c und d zwischen a und b, e zwischen c und d, so liegt e auch zwischen a und b.

Lehrs. 10. Ist a eine der Angaben A, nicht die letzte, so hat eines und nur eines der A, etwa b, die Eigenschaft, daß b auf a folgt und zwischen a und b kein A liegt.

Bew. — Unter den A folgt auf a eine Angabe b oder Angaben B (wobei B alle auf a folgenden A bedeuten soll), weil sonst a letztes wäre. Folgt nur die Angabe b, so ist es unmöglich, daß eines der A, etwa c, zwischen a und b liegt, weil sonst c ebenfalls auf a folgte, nicht nur b. Dasselbe gilt, wenn auf a Angaben B folgen und unter diesen etwa b die erste ist, weil sonst c ein B sein und dem ersten B vorangehen müßte. Ist ferner b' ein auf a folgendes, aber von b verschiedenes A, also ein B, aber nicht erstes, so liegt ein A, nämlich b, zwischen a und b'.

Analog beweist man:

Lehrs. 11. Ist a eine der Angaben A, nicht die erste, so hat eines und nur eines der A, etwa b, die Eigenschaft, daß b vor a vorangeht und zwischen a und b kein A liegt.

Def. 4. Sind a und b Angaben A, a vor b, aber kein A zwischen a und b, so heißt b das auf a unmittelbar folgende A, das nächstfolgende, nächstspätere zu, nächste nach a; a heißt das dem b unmittelbar vorhergehende, nächstvorhergehende, nächste vor b.

Lehrs. 12. Ist a eine der Angaben A, nicht die letzte, so folgt ein und nur ein A unmittelbar auf a. Ist a nicht die erste, so geht ein und nur ein A ihm unmittelbar voran.

Grds. 4. Ist a eine Angabe eines Dinges α, so ist eine auf a folgende Angabe des Dinges α möglich. Ist a Angabe eines Dinges α, b eine darauf folgende Angabe eines anderen Dinges, so ist eine auf b folgende Angabe von α möglich.

Lehrs. 13. Sind die A Angaben von Dingen, und ist eines der A eine Angabe eines Dinges α, so ist eine auf alle A folgende Angabe von α möglich.

Lehrs. 14. Sind Dinge angegeben, so können nach diesen andere Dinge angegeben werden (Grds. 2).

Anhang zu § 2.

Wesen des mathematischen Beweises.

Unsere Aussagen sind, soweit wir sie nicht bloß versuchsweise aufstellen, Grundsätze, Definitionen und Lehrsätze. Die Fragen, ob das System unserer Grundsätze einen Widerspruch enthalten kann oder auf einen geringeren Umfang zurückführbar ist, lassen wir unerörtert.

Jede Definition darf nur die vorangestellten Aussagen benutzen. Jeder Lehrsatz muß sich mittels der vorangestellten Aussagen beweisen lassen, d. h. er muß entweder mit einer solchen Aussage gleichbedeutend sein, oder nur einen Teil ihres Inhalts darstellen, oder den Inhalt von mehreren solchen Aussagen vereinigen. Zur Ersparnis von Zeit und Raum wird die Darstellung durch Unterdrückung von Zwischengliedern — meist erheblich — abgekürzt; einer Darstellung aber, die sich nicht durch nähere Ausführung auf die beschriebene Form bringen läßt, kommt keine mathematische Beweiskraft zu.

Die Aussagen, die hiernach als Definitionen oder Lehrsätze zu gelten haben, werden jedoch tatsächlich nur zu einem (dem

weitaus kleinsten) Teil als solche bezeichnet. Definition im gebräuchlichen Sinn ist eine Erklärung, die allgemein angenommen ist, oder die zum Zweck allgemeiner Annahme aufgestellt wird, oder die zur Aufstellung einer solchen Erklärung eine wichtigere Vorstufe bildet. Lehrsatz im gebräuchlichen Sinn ist ein abgeleiteter Satz, der sich als fruchtbar erwiesen hat, oder den man für fruchtbar hält, oder der bei der Gewinnung eines solchen Satzes als wichtigere Vorstufe dient.

Werden die Worte „Definition“ und „Lehrsatz“ in diesem Sinn gebraucht, so ist zu verlangen, daß jede Definition nur die vorangestellten Grundsätze, Definitionen und Lehrsätze benutzt, und daß jeder Lehrsatz mittels der vorangestellten Grundsätze, Definitionen und Lehrsätze ausgedrückt und bewiesen wird. Die Beweise der Lehrsätze können wir aber dann nicht mehr auf die obige Form beschränken; vielmehr muß jetzt fast jedem Lehrsatz als „Beweis“ eine zu ihm führende Aussage oder Folge von Aussagen unmittelbar vorausgeschickt werden. Üblich von alters her ist es allerdings, den Lehrsatz vor seinem Beweise auszusprechen; daß man den Beweis manchmal der Kürze halber ganz unterdrückt, kommt hier nicht in Betracht. Der Beweis ist dann, wenn man ihn vollständig ausführt, eine mit dem Lehrsatz endigende Folge von Aussagen, die sich an die dem Lehrsatz vorangestellten Grundsätze, Definitionen und Lehrsätze so anschließt, daß die Darstellung Beweiskraft in dem oben angegebenen Sinn erhält. Die Bestandteile des Beweises sind außer den dem Lehrsatz vorausgegangenen Grundsätzen, Definitionen und Lehrsätzen andere Erklärungen und abgeleitete Sätze; diese spielen jedoch nur eine vorübergehende Rolle und dürfen weiterhin nur mittels ausdrücklicher Wiederaufnahme verwendet werden.

In dem Beweise eines (Lehrsatzes oder in einem Beweise vorkommenden) abgeleiteten Satzes A können ein oder mehrere abgeleitete Sätze vorkommen von der Form: Wenn die Aussage A falsch ist, so ist die Aussage B richtig. In einem solchen Fall wird, wenn es nicht schon vorher geschehen ist, im Lauf des Beweises festgestellt, daß eine der Aussagen, die, wenn A falsch ist, richtig sein müssen, nicht richtig ist; daraus wird die Richtigkeit der Aussage A gefolgert. Den

Beweisen dieser Art — den indirekten — werden die direkten Beweise vorgezogen.

Hält man die bezüglich des Beweisverfahrens aufgestellten Forderungen fest, so kann man die impliziten Definitionen gewisser Begriffe nur entbehren, wenn man auf diese Begriffe und die dadurch gewährte Erleichterung der Ausdrucksweise verzichtet.

§ 3. Folge und Reihe.

Grds. 5. Sind Angaben A von Dingen oder eines Dinges geschehen, so kann ein und nur ein Ding $\mathfrak{A}$ angegeben werden, dem alle A und nur sie angehören, und zwar ist jede Angabe von $\mathfrak{A}$ später als jedes A.

Def. 5. $\mathfrak{A}$ heißt eine Folge und zwar die Folge der A, die A heißen die Elemente von $\mathfrak{A}$. Man sagt: $\mathfrak{A}$ besteht aus den A.

Def. 6. Sind die A Angaben verschiedener Dinge, der Dinge A, so heißt die Folge $\mathfrak{A}$ die Reihe $\mathfrak{A}$ der A. Die A heißen die Glieder der Reihe.

Statt: a ist ein Glied von $\mathfrak{A}$, sagt man auch: a ist enthalten, kommt vor in $\mathfrak{A}$ (statt: „nicht vorkommen“: fehlen).

Def. 7. Geht in der Reihe $\mathfrak{A}$ die Angabe von a der Angabe von b voran (kürzer: ist a in $\mathfrak{A}$ vor b angegeben), so sagt man: in $\mathfrak{A}$ geht das Glied a dem Gliede b voran, u. dgl.

Das zuerst angegebene Glied heißt erstes Glied, Anfangsglied; das zuletzt angegebene letztes Glied, Endglied. Anfangs- und Endglied werden äußere, die etwa übrigen innere Glieder genannt.

Entsprechend gestaltet sich die Anwendung der Ausdrücke: zwischen, nächstfolgend und nächstvorhergehend. Glieder, zwischen denen kein anderes liegt, heißen benachbarte Glieder.

Die Glieder der Reihe $\mathfrak{A}$ von a an, bedeutet: a und die etwa auf a folgenden Glieder; die Glieder bis b, bedeutet: b und die etwa vorangehenden; die Glieder von a bis b, bedeutet: a, b und die etwa zwischen a und b liegenden.

Def. 8. Ist $\mathsf{\Pi}$ Gemeinname für eine Angabe α eines Dinges und nur noch für eine Angabe β desselben oder eines anderen Dinges, so heißt die Folge $\mathfrak{P}$ der $\mathsf{\Pi}$ eine Paarfolge; sind α und β Angaben verschiedener Dinge a und b, so heißt $\mathfrak{P}$ eine Paarreihe aus a und b.

Lehrs. 15. In der Paarfolge 𝔓 ist entweder α erstes und β letztes, oder β erstes und α letztes, und kein П zwischen ihnen. In der Paarreihe 𝔓 sind a und b benachbarte Glieder, und zwar ist entweder a erstes und b letztes, oder b erstes und a letztes Glied.

Def. 9. Die Paarreihe 𝔓 heißt Paarreihe aus 𝔄, wenn α und β Angaben A sind.

Lehrs. 16. In 𝔄 benachbarte Glieder sind die Glieder einer und nur einer Paarreihe aus 𝔄.

Def. 10. Eine Paarreihe aus 𝔄 heißt eine Nachbarreihe aus 𝔄, wenn ihre Glieder in 𝔄 benachbart sind.

Lehrs. 17. Ist C Gemeinname für gewisse A, so bilden die Angaben der C in 𝔄 eine und nur eine Folge, und zwar eine Reihe ℭ. Jede Paarreihe der C aus 𝔄 ist Paarreihe aus ℭ, und umgekehrt.

Ist a ein A, auf das in 𝔄 ein C folgt (dem in 𝔄 ein C vorangeht), so gibt es in 𝔄 ein und nur ein auf a folgendes (a vorangehendes) C, etwa c, von der Art, daß zwischen ihm und a kein C liegt.

Def. 11. ℭ heißt eine Teilreihe aus 𝔄 (auch, wenn ℭ mit 𝔄 zusammenfällt), und zwar: die Teilreihe der C aus 𝔄.

Das erste, letzte C in ℭ heißt erstes, letztes C in 𝔄. In ℭ benachbarte C heißen: in 𝔄 aufeinanderfolgende C.

c heißt das in 𝔄 nächste C nach (vor) a.

Lehrs. 18. Sind c' und c'' Dinge C und liegt zwischen ihnen in 𝔄 kein C, so sind c' und c'' in 𝔄 aufeinanderfolgende C, und umgekehrt.

Ist a selbst ein C, so ist das in 𝔄 nächste C nach (vor) a zugleich das in ℭ nächste C nach (vor) a.

§ 4. Abschnitte von Reihen.

Def. 12. Ist B Gemeinname für die Glieder der Reihe 𝔄 von a bis b, a vor b, so heißt die Teilreihe 𝔅 der B aus 𝔄 ein Abschnitt aus 𝔄, und zwar: der Abschnitt aus 𝔄 von a bis b.

Lehrs. 19. Der Abschnitt 𝔅 beginnt mit a und endet mit b.

Ist a erstes und b letztes A, so ist der Abschnitt $\mathfrak{B}$ die Reihe $\mathfrak{A}$ selbst. Ist $\mathfrak{A}$ keine Paarreihe, so gibt es auch andere Abschnitte von $\mathfrak{A}$.

Eine Paarreihe aus $\mathfrak{B}$ ist Paarreihe aus $\mathfrak{A}$.

Zu den Abschnitten gehören auch die Nachbarreihen.

Teilreihe, Abschnitt, Paarreihe, Nachbarreihe aus einer Paarreihe ist nur sie selbst.

Lehrs. 20. Sind c und d Glieder des Abschnittes $\mathfrak{B}$, c vor d, so sind (Lehrs. 9) die zwischen c und d gelegenen Glieder von $\mathfrak{A}$ zugleich Glieder von $\mathfrak{B}$ und zwar die zwischen c und d gelegenen Glieder von $\mathfrak{B}$.

Mithin ist ein Abschnitt von $\mathfrak{B}$ Abschnitt von $\mathfrak{A}$; insbesondere ist eine Nachbarreihe aus $\mathfrak{B}$ zugleich Nachbarreihe aus $\mathfrak{A}$, eine aus Gliedern von $\mathfrak{B}$ bestehende Nachbarreihe aus $\mathfrak{A}$ zugleich Nachbarreihe aus $\mathfrak{B}$.

Lehrs. 21. Ist c ein von b verschiedenes B, so ist das nächstfolgende B das nächstfolgende A.

Bew. — Das nächste B nach c (Lehrs. 12) heiße d. Läge ein A, etwa e, zwischen c und d, so läge es nach c, folglich auch nach a, und vor d, folglich auch vor b, wäre mithin ein B.

Analog beweist man:

Lehrs. 22. Ist c ein von a verschiedenes B, so ist das nächstvorhergehende B das nächstvorhergehende A.

Lehrs. 23. (Vollständige Induktion.) Gilt eine Aussage für a, und steht fest, daß die Aussage, wenn sie für ein von b verschiedenes und in der Reihe $\mathfrak{A}$ nicht letztes A gilt, auch für das in $\mathfrak{A}$ nächstfolgende A richtig ist, so gilt die Aussage für jedes B. (Eine solche Aussage ist z. B.: das Ding ist ein B.)

Bew. — Unter den obigen Voraussetzungen muß die Aussage, wenn sie für ein von b verschiedenes B gilt, auch für das nächstfolgende B (Lehrs. 21) gelten. Gesetzt nun, die Aussage wäre nicht für jedes B richtig; wird dann das erste B, für das die Aussage nicht gilt, mit d bezeichnet, so ist d von a verschieden. Wird das nächste B vor d, das zugleich (Lehrs. 22) nächstes A vor d ist, mit c bezeichnet, so ist die Aussage richtig für c, mithin auch für d, im Widerspruch zu der vorhin gemachten Annahme.

Analog beweist man:

Lehrs. 24. Gilt eine Aussage für b, und steht fest, daß die Aussage, wenn sie für ein von a verschiedenes und in der Reihe $\mathfrak{A}$ nicht erstes A gilt, auch für das in $\mathfrak{A}$ nächstvorhergehende A richtig ist, so gilt die Aussage für jedes B.

Lehrs. 25. Der Abschnitt einer Reihe (nicht Paarreihe) vom ersten Glied bis zu dem dem letzten Glied unmittelbar vorangehenden enthält alle Glieder der Reihe außer dem letzten.

Def. 13. Ist $\mathfrak{B}$ derjenige Abschnitt einer Reihe $\mathfrak{A}$, der nur deren letztes Glied z nicht enthält, so sagt man statt: eine Reihe $\mathfrak{A}$ bilden, auch: z an $\mathfrak{B}$ anfügen.

Lehrs. 26. Es sei $\mathfrak{A}$ irgend eine Reihe, nicht Paarreihe, a ihr erstes Glied, b das nächstfolgende, z das letzte (also b nicht z, b vor z), B Gemeinname der Glieder von b bis z, $\mathfrak{S}_B$ der Abschnitt von a bis B, c irgend ein von z verschiedenes B, d das nächstfolgende A nach c. Gilt dann eine Aussage für die Reihe $\mathfrak{S}_b$ und steht fest, daß die Aussage, wenn sie für $\mathfrak{S}_c$ richtig ist, auch für $\mathfrak{S}_d$ gilt, so gilt (Lehrs. 23) die Aussage für alle $\mathfrak{S}_B$, insbesondere auch für $\mathfrak{S}_z$, d. h. für $\mathfrak{A}$ selbst.

Der Satz gilt auch, wenn b irgend ein auf a folgendes, nicht letztes A ist.

Lehrs. 27. Gilt eine Aussage für jede Paarreihe und steht fest, daß die Aussage, wenn sie für eine Reihe gilt, auch nach Anfügung eines weiteren Gliedes richtig bleibt, so gilt die Aussage für jede Reihe.

Bew. — c ist ein Glied des Abschnittes $\mathfrak{S}_d$; der Abschnitt aus $\mathfrak{S}_d$ von a bis c ist (Lehrs. 20) auch Abschnitt aus $\mathfrak{A}$, d. h. er ist $\mathfrak{S}_c$, und zwar ist $\mathfrak{S}_c$ derjenige Abschnitt von $\mathfrak{S}_d$, der nur d nicht enthält. Folglich entsteht (Def. 13) $\mathfrak{S}_d$ aus $\mathfrak{S}_c$ durch Anfügen von d, und man kann nunmehr hier Lehrs. 26 anwenden.

§ 5. Konforme Reihen.

Lehrs. 28. Ist $\mathfrak{P}$ Paarreihe aus a und b (a vor b), so ist eine weitere Paarreihe $\mathfrak{P}'$ aus a und b möglich, die ebenfalls mit a beginnt.

Bew. — Nach Lehrs. 13 ist eine auf $\mathfrak{P}$ folgende Angabe α' von a möglich, ebenso eine auf α' folgende Angabe β' von b. Belege ich α' und β' mit dem Gemeinnamen Π', so ist die Folge der Π' die gewünschte Paarreihe.

Def. 14. Paarreihen derselben Dinge mit demselben Anfangsglied nennen wir konform. Jede Paarreihe heiße sich selbst konform.

Lehrs. 29. Nach jeder Reihe gewisser Dinge ist eine Reihe derselben Dinge mit lauter zu den Nachbarreihen jener Reihe konformen Nachbarreihen möglich.

Bew. — Für den Fall der Paarreihe ist die Behauptung bewiesen (Lehrs. 28). Es handelt sich also nur noch um den Fall einer Reihe $\mathfrak{A}$, die nicht Paarreihe ist. Werden auf diese die Bezeichnungen aus Lehrs. 26 angewendet und überdies die Angaben von c und d in $\mathfrak{A}$ mit γ und δ bezeichnet, so ist zu beweisen, daß die Behauptung, wenn sie für $\mathfrak{S}_c$ gilt (d. h. wenn wir nach $\mathfrak{A}$ eine Reihe $\mathfrak{S}_c'$ derselben Dinge wie $\mathfrak{S}_c$ mit lauter konformen Nachbarreihen haben), auch für $\mathfrak{S}_d$ gilt; dabei beginnt $\mathfrak{S}_c'$ mit a und endet mit c (Lehrs. 19). Ist in der Tat γ' die Angabe von c in $\mathfrak{S}'$, δ' eine spätere Angabe von d (Grds. 4), $\mathfrak{S}_d'$ die Folge aus den zu $\mathfrak{S}_c'$ gehörigen Angaben und δ', so ist $\mathfrak{S}_d'$ eine nach $\mathfrak{A}$ aus den Gliedern von $\mathfrak{S}_d$ gebildete Reihe (s. Bew. z. Lehrs. 27), und es sind die Nachbarreihen aus $\mathfrak{S}_d$ und $\mathfrak{S}_d'$, die (Lehrs. 20) schon zu $\mathfrak{S}_c$ und $\mathfrak{S}_c'$ gehörten, konform, ebenso die einzigen neuen, $\gamma\delta$ und $\gamma'\delta'$.

Da (Lehrs. 19) konforme Paarreihen Reihen derselben Dinge mit konformen Nachbarreihen sind, so ist folgende Definition berechtigt:

Def. 15. Reihen (derselben Dinge) mit lauter konformen Nachbarreihen nennen wir konform.

Jede Reihe heiße sich selbst konform.

Lehrs. 30. In konformen Reihen ist das Anfangsglied der einen zugleich Anfangsglied der anderen, das Endglied der einen auch Endglied der anderen. Eine zu einer Paarreihe konforme Reihe ist eine Paarreihe.

Lehrs. 31. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ konforme Reihen, ebenso $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$, so sind es auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$.

Lehrs. 32. Nach jeder Reihe 𝔄 ist eine konforme Reihe möglich.

Folgt auf 𝔄 die Angabe ε eines Dinges, so ist auch nach ε eine zu 𝔄 konforme Reihe möglich.

Lehrs. 33. Sind 𝔄 und 𝔈 Reihen derselben Dinge und ist jede Nachbarreihe aus 𝔄 einer Paarreihe aus 𝔈 konform, so sind alle entsprechenden (aus denselben Gliedern bestehenden) Paarreihen aus 𝔄 und 𝔈 konform.

Bew. — Es sei a ein Glied von 𝔄, nicht letztes, b das nächstfolgende. Dann ist zu beweisen, daß jedes Glied, das in 𝔄 auf a folgt, auch in 𝔈 auf a folgt. Dies ist richtig für b; denn der Nachbarreihe ab aus 𝔄 entspricht eine konforme Paarreihe ab aus 𝔈. Ist b nicht letztes Glied von 𝔄, so erteilen wir den in 𝔄 auf a folgenden Gliedern den Gemeinnamen B. Sind dann cd in 𝔄 benachbarte B, c vor d, so ist (Lehrs. 23) nur noch zu beweisen, daß, wenn c in 𝔈 auf a folgt, dies auch von d gilt. In der Tat liefert die Nachbarreihe cd aus 𝔄 eine konforme Paarreihe für 𝔈, d. h.: in 𝔈 steht a vor c, c vor d, folglich a vor d

Lehrs. 34. Entsprechende Paarreihen konformer Reihen sind konform.

Mithin übertragen sich von einer Reihe auf die andere die Begriffe: früher, später, erstes, letztes, zwischen, nächstfrüher, nächstspäter, benachbart.

Lehrs. 35. Reihen derselben Glieder mit lauter konformen Paarreihen sind konform.

Bew. — Durch die konformen Paarreihen übertragen sich die Begriffe: früher und später, daher auch: zwischen und nächstfolgend, aus einer Reihe auf die andere.

Lehrs. 36. Entsprechende (aus denselben Gliedern bestehende) Abschnitte konformer Reihen sind konform; und zwar entspricht jedem Abschnitt der einen ein und nur ein Abschnitt der anderen.

Bew. — Seien 𝔄 und 𝔈 konforme Reihen, 𝔅 der Abschnitt aus 𝔄 von a bis b. Auch in 𝔈 liegt a vor b; nenne ich 𝔅′ den Abschnitt aus 𝔈 von a bis b, so enthalten 𝔅 und 𝔅′ dieselben Glieder (Lehrs. 34) in konformen Nachbarreihen (Lehrs. 20).

Lehrs. 37. Entsprechende Teilreihen konformer Reihen sind konform; und zwar entspricht jeder Teilreihe der einen eine und nur eine Teilreihe der anderen.

Def. 16. Eine Paarreihe $\mathfrak{Q}$, die mit dem Endglied einer anderen Paarreihe $\mathfrak{P}$ beginnt und mit ihrem Anfangsglied endigt, heißt Umkehrung von $\mathfrak{P}$.

Lehrs. 38. Ist $\mathfrak{Q}$ eine Umkehrung von $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ eine Umkehrung von $\mathfrak{Q}$.

Alle Umkehrungen einer Paarreihe $\mathfrak{P}$ sind konform.

Eine Umkehrung einer Umkehrung von $\mathfrak{P}$ ist $\mathfrak{P}$ konform.

Die Umkehrung einer zu $\mathfrak{P}$ konformen Paarreihe ist eine Umkehrung von $\mathfrak{P}$, ebenso auch eine zu einer Umkehrung von $\mathfrak{P}$ konforme Paarreihe.

Lehrs. 39. Nach jeder Paarreihe $\mathfrak{P}$ ist eine Umkehrung von $\mathfrak{P}$ möglich; folgt auf $\mathfrak{P}$ eine Angabe ε, so ist auch nach ε eine Umkehrung von $\mathfrak{P}$ möglich.

Lehrs. 40. Sind Paarreihen $\mathfrak{H}$ angegeben, so können Paarreihen $\mathfrak{K}$ angegeben werden, so daß zu jedem $\mathfrak{H}$ eine Umkehrung unter den $\mathfrak{K}$ vorkommt, und umgekehrt.

Bew. — Bilden die $\mathfrak{H}$ eine Paarreihe $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, so kann man (Lehrs. 39) nach $\mathfrak{p}'$ eine Umkehrung $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$ und nach $\mathfrak{q}$ eine Umkehrung $\mathfrak{q}'$ von $\mathfrak{p}'$ angeben und die Reihen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen; nach Lehrs. 38 sind die $\mathfrak{H}$ dann auch Umkehrungen der $\mathfrak{K}$. Anderenfalls sei $\mathfrak{A}$ eine Reihe der $\mathfrak{H}$. Wendet man die Bezeichnungen von Lehrs. 26 an, so ist der Lehrsatz richtig für die Paarreihe $\mathfrak{S}_b$ und bleibt, wenn er für $\mathfrak{S}_c$ gilt, auch für $\mathfrak{S}_d$ richtig (Lehrs. 38 und 39).

§ 6. Zuordnung von Dingen.

Lehrs. 41. Sind Dinge A und andere Dinge A angegeben, so sind Paarreihen $\mathfrak{H}$ möglich mit folgenden Eigenschaften: kein $\mathfrak{H}$ hat mit einem anderen ein Glied gemein; jedes $\mathfrak{H}$ besteht aus einem A und einem A; tritt eine weitere Paarreihe hinzu, so können diese Eigenschaften nicht beide fortbestehen. Und zwar können die $\mathfrak{H}$ so gebildet werden, daß jedes mit dem A beginnt.

Bew. — Es sei $\mathfrak{Q}$ eine Reihe der A. Ist $\mathfrak{Q}$ eine Paarreihe, etwa ab, und sind $\alpha\beta$ Dinge A, so haben die Paarreihen $a\alpha$ $b\beta$ die geforderte Eigenschaft; eine weitere Paarreihe müßte ein von a und b verschiedenes A enthalten. Es ist also (Lehrs. 27) nur noch zu beweisen, daß der Satz, wenn er für irgend eine Reihe $\mathfrak{Q}$ gilt, auch nach Hinzufügung eines weiteren Gliedes c richtig bleibt, wobei die A von den A und von c (von den A') verschieden anzunehmen sind. In der Tat: Kommen in den $\mathfrak{H}$ alle A vor, so haben diese $\mathfrak{H}$ auch nach Hinzutreten von c die verlangte Eigenschaft. Im anderen Fall müssen in den $\mathfrak{H}$ alle A vorkommen; bildet man eine Paarreihe aus c und einem übrigen A, bezeichnet diese Paarreihe und die $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}'$, so haben die $\mathfrak{H}'$ die verlangte Eigenschaft.

Lehrs. 42. In den $\mathfrak{H}$ kommen entweder die A und die A, oder nur die A, oder nur die A vollständig vor, und zwar tritt jeder dieser Fälle ein.

Bew. — Kämen in den $\mathfrak{H}$ weder die A noch die A vollständig vor, so wäre noch eine Paarreihe $\mathfrak{H}$ möglich. Weiter seien die A etwa Dinge abc, die A etwa Dinge $\alpha\beta\gamma$, dann haben die Paarreihen $a\alpha$ $b\beta$ $c\gamma$ die in Lehrsatz 41 verlangte Eigenschaft und enthalten alle A und alle A. Wird der Gemeinname A noch auf ein weiteres Ding δ ausgedehnt, so haben dieselben Paarreihen die verlangte Eigenschaft, enthalten jedoch nur die A vollständig, usw.

Def. 17. Ist $\mathfrak{P}$ eine mit a beginnende und mit α endende Paarreihe, so sagen wir: durch $\mathfrak{P}$ wird α dem a zugeordnet.

Behält man die in Lehrs. 41 angewendete Bezeichnungsweise bei, und zwar so, daß jedes $\mathfrak{H}$ mit dem A beginnt, so sagen wir: durch die $\mathfrak{H}$ werden die A den A zugeordnet.

Lehrs. 43. Sind Dinge A und andere Dinge A angegeben, so kann man sowohl die A den A, als auch die A den A zuordnen.

Def. 18. Die Zuordnung der A zu den A durch die $\mathfrak{H}$ heiße total, exzessiv, defektiv, je nachdem die A und die A, oder nur die A, oder nur die A in den $\mathfrak{H}$ vollständig vorkommen.

Lehrs. 44. Sind die A den A durch Paarreihen $\mathfrak{H}$ total, exzessiv, defektiv zugeordnet, so lassen sich die A den A durch andere Paarreihen $\mathfrak{K}$ total, defektiv, exzessiv zuordnen.

Bew. — Bildet man die $\mathfrak{K}$ gemäß Lehrs. 40, so haben sie die in Lehrs. 41 den $\mathfrak{H}$ zugeschriebenen Eigenschaften, nur daß jedes $\mathfrak{K}$ mit dem A beginnt. Die in den $\mathfrak{K}$ vorkommenden Glieder sind dieselben wie die in den $\mathfrak{H}$.

Lehrs. 45. Sind die A den A durch Paarreihen $\mathfrak{H}$ total, exzessiv, defektiv zugeordnet und ist a ein A, α ein A, so kann man die A den A durch solche Paarreihen $\mathfrak{H}_0$ total, exzessiv, defektiv zuordnen, daß ein $\mathfrak{H}_0$ aus a und α besteht.

Bew. — Kommen a und α in den $\mathfrak{H}$ vor, aber nicht in derselben Paarreihe, sondern etwa in Paarreihen $a\beta$ $b\alpha$, so seien die $\mathfrak{H}_0$ die übrigen $\mathfrak{H}$ und die Paarreihen $a\alpha$ $b\beta$; die Glieder der $\mathfrak{H}_0$ sind dann dieselben wie die der $\mathfrak{H}$. Kommt in den $\mathfrak{H}$ von den Dingen a und α nur eines, etwa a, vor in Verbindung mit β, so sind die A den A durch die $\mathfrak{H}$ exzessiv zugeordnet. Bezeichnet man jetzt mit $\mathfrak{H}_0$ die Paarreihe $a\alpha$ und die $\mathfrak{H}$ außer $a\beta$, so kommen in den $\mathfrak{H}_0$ nicht alle A vor, d. h. die Zuordnung ist wieder exzessiv.

Lehrs. 46. Es seien Dinge A und andere Dinge A angegeben, ferner von diesen verschiedene Dinge a' und α', A' Gemeinname für a' und die A, A' für α' und die A. Kann man den A die A total, exzessiv, defektiv zuordnen, so kann man auch den A' die A' total, exzessiv, defektiv zuordnen, und umgekehrt.

Bew. für letzteres mit Hilfe von Lehrs. 45.

Lehrs. 47. Es ist nicht möglich, daß den A andere Dinge A durch gewisse Paarreihen total, durch andere nicht total zugeordnet werden.

Bew. — Bilden die A eine Paarreihe rs und kann man ihnen die A total zuordnen etwa durch die Paarreihen $r\varrho$ $s\sigma$, so bilden auch die A eine Paarreihe und können den A nur noch durch die Paarreihen $r\sigma$ $s\varrho$ und konforme, also nur total zugeordnet werden. Hiernach genügt es zu beweisen, daß der Satz, falls er für die Glieder A einer Reihe $\mathfrak{A}$ gilt, nach Anfügung eines Gliedes a richtig bleibt, wobei für a und die A der Gemeinname A' eingeführt werde. Könnten nun den A' andere Dinge A', zu denen α' gehöre, total und nicht total zugeordnet werden, so wären nach dem obigen die A' nicht die Glieder einer Paarreihe und, wenn man für die A' außer α' den Ge-

meinnamen A einführt, so könnte man (Lehrs. 46) den A die A total und nicht total zuordnen.

Lehrs. 48. Sind Dinge A und andere Dinge A angegeben, so kann man den A die A entweder total oder exzessiv oder defektiv zuordnen, und zwar schließt jede dieser Möglichkeiten die anderen aus.

Bew. — Es ist (Lehrs. 47) nur noch zu beweisen, daß es nicht möglich ist, den A die A durch Paarreihen $\mathfrak{H}$ exzessiv und durch Paarreihen $\mathfrak{H}'$ defektiv zuzuordnen. Wären solche Zuordnungen möglich, wobei die in den $\mathfrak{H}$ vorkommenden A mit dem Gemeinnamen A_0, die die A_0 enthaltenden $\mathfrak{H}'$ mit dem Gemeinnamen $\mathfrak{H}_0$ belegt seien, so wären den A die A_0 durch die $\mathfrak{H}$ total, durch die $\mathfrak{H}_0$ defektiv zugeordnet.

§ 7. Anwendung auf Reihen.

Def. 19. Ist $\mathfrak{A}$ irgend eine Reihe gewisser Dinge, der A, $\mathfrak{B}$ irgend eine Reihe anderer Dinge, der B, so wollen wir sagen: $\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{A}$ ebenbürtig, stärker als $\mathfrak{A}$, schwächer als $\mathfrak{A}$, je nachdem die B den A total, exzessiv, defektiv zugeordnet werden können.

Lehrs. 49. Ist $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$ ebenbürtig, stärker als $\mathfrak{A}$, schwächer als $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ ebenbürtig, schwächer als $\mathfrak{B}$, stärker als $\mathfrak{B}$ (Lehrs. 44).

Lehrs. 50. $\mathfrak{B}$ ist entweder $\mathfrak{A}$ ebenbürtig oder stärker als $\mathfrak{A}$ oder schwächer als $\mathfrak{A}$, und zwar schließt jede dieser Möglichkeiten die anderen aus (Lehrs. 48).

Lehrs. 51. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Paarreihen, so sind sie einander ebenbürtig.

Ist $\mathfrak{A}$ Paarreihe, $\mathfrak{B}$ aber nicht, so ist $\mathfrak{A}$ schwächer als $\mathfrak{B}$.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einander ebenbürtig, und ist $\mathfrak{A}$ Paarreihe, so ist es auch $\mathfrak{B}$.

Lehrs. 52. Zu jeder Reihe gibt es (kann man angeben) ebenbürtige und stärkere Reihen. Zu jeder Reihe, die nicht Paarreihe ist, gibt es schwächere.

Bew. — Zunächst gibt es zu jeder Paarreihe ebenbürtige und stärkere Reihen; gilt dies aber von irgend einer Reihe $\mathfrak{A}$, d. h. gibt es ebenbürtige oder stärkere $\mathfrak{B}$, so gilt es auch für

eine Reihe $\mathfrak{A}'$, die durch Anfügung eines Gliedes a an $\mathfrak{A}$ entsteht. Ist nämlich a nicht in $\mathfrak{B}$ enthalten, so füge man ein neues Glied b an $\mathfrak{B}$ an; kommt aber a in $\mathfrak{B}$ vor, so sei a_0 ein neues Ding und $\mathfrak{B}_0$ eine Reihe aus a_0 und den von a verschiedenen B, also $\mathfrak{B}_0$ ebenbürtig oder stärker als $\mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{A}$ keine Paarreihe, so gibt es eine ebenbürtige Reihe $\mathfrak{B}$. Da dann auch $\mathfrak{B}$ nicht Paarreihe ist, so kann man aus ihr durch Fortlassen eines Gliedes eine Reihe, schwächer als $\mathfrak{A}$, bilden.

Lehrs. 53. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ ebenbürtige Reihen, $\mathfrak{B}$ eine Reihe anderer Dinge B, und ist $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$ ebenbürtig, stärker als $\mathfrak{A}$, schwächer als $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A}'$ ebenbürtig, stärker als $\mathfrak{A}'$, schwächer als $\mathfrak{A}'$.

Bew. — Den Gliedern A der $\mathfrak{A}$ seien die B durch die Paarreihen $\mathfrak{H}$, die Glieder A' der $\mathfrak{A}'$ durch die Paarreihen $\mathfrak{K}$ zugeordnet. Ist ab ein $\mathfrak{H}$, so kommt a in einem der $\mathfrak{K}$ vor, etwa mit a', so daß dieses $\mathfrak{H}$ zu einer Paarreihe $a'b$ führt. Es können somit (vgl. Bew. zu Lehrs. 40) Paarreihen $\mathfrak{H}'$ angegeben werden, deren jede auf solche Weise aus einem $\mathfrak{H}$ entsteht; die $\mathfrak{H}'$ enthalten dieselben B wie die $\mathfrak{H}$. Für die A' und B sind die $\mathfrak{H}'$ Paarreihen von den in Lehrs. 41 aufgeführten Eigenschaften. Gäbe es nämlich eine weitere Paarreihe $A'B$, etwa $\alpha'\beta$, die mit keinem $\mathfrak{H}'$ ein Glied gemein hat, so wäre β in keinem $\mathfrak{H}$ enthalten, α' aber in einem oben nicht verwendeten $\mathfrak{K}$, etwa mit α, und dieses α wäre in keinem $\mathfrak{H}$ enthalten; also könnte ich aus α und β eine Paarreihe bilden, ohne die die $\mathfrak{H}$ unvollständig geblieben wären.

Kommen endlich in den $\mathfrak{H}$ alle A vor, so kommen auch in den $\mathfrak{H}'$ alle A' vor, und umgekehrt, weil dann jedesmal alle $\mathfrak{K}$ verwendet sind.

Lehrs. 54. Ist eine Reihe $\mathfrak{A}$ schwächer als $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ schwächer als $\mathfrak{C}$, und haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ kein Glied gemein, so ist $\mathfrak{A}$ schwächer als $\mathfrak{C}$.

Bew. — Den A seien die B durch Paarreihen $\mathfrak{H}$, den B die C (die Glieder von $\mathfrak{C}$) durch die $\mathfrak{K}$ zugeordnet. Ist ab ein $\mathfrak{H}$, so kommt b in einem $\mathfrak{K}$ vor, etwa mit c, so daß dieses $\mathfrak{H}$ zu einer Paarreihe ac führt. Es können somit Paarreihen $\mathfrak{H}'$ angegeben werden, deren jede auf solche Weise aus einem $\mathfrak{H}$ entsteht. Die $\mathfrak{H}'$ enthalten alle A, aber nicht alle C.

Lehrs. 55. Sind irgendwelche Reihen angegeben, so gibt es eine Reihe, die stärker ist als alle gegebenen.

Bew. — Ist m ein in keiner der gegebenen Reihen enthaltenes Ding, M Gemeinname für m und alle Glieder der gegebenen Reihen, $\mathfrak{M}$ eine Reihe der M, $\mathfrak{N}$ eine $\mathfrak{M}$ ebenbürtige Reihe etwa der N, so daß die M den N etwa durch die Paare $\mathfrak{H}$ total zugeordnet sind, so ist $\mathfrak{N}$ stärker als jede der gegebenen Reihen, etwa als die Reihe $\mathfrak{A}$ der A. Da nämlich als Endglieder der $\mathfrak{H}$ alle A, aber nicht nur sie, vorkommen, so können wir die $\mathfrak{H}$, die mit einem A endigen, mit einem Gemeinnamen $\mathfrak{K}$ belegen, und durch diese $\mathfrak{K}$ den N die A zuordnen. Dabei kommen alle A vor, aber nicht alle N.

Lehrs. 56. Ist $\mathfrak{B}$ ein Abschnitt der Reihe $\mathfrak{A}$, nicht $\mathfrak{A}$ selbst, so ist jede $\mathfrak{B}$ ebenbürtige Reihe schwächer als $\mathfrak{A}$.

Lehrs. 57. Ist die Reihe $\mathfrak{A}$ der A schwächer als die mit α beginnende Reihe $\mathfrak{M}$ der M, so ist $\mathfrak{A}$ einem und nur einem mit α beginnenden Abschnitt von $\mathfrak{M}$ ebenbürtig.

Bew. — Ist $\mathfrak{A}$ Paarreihe, so ist $\mathfrak{A}$ ebenbürtig der mit α beginnenden Nachbarreihe aus $\mathfrak{M}$. Im anderen Fall wenden wir die Bezeichnungen von Lehrs. 26 an und beweisen, daß, wenn $\mathfrak{S}_c$ einem von α etwa bis γ reichenden Abschnitt $\mathfrak{T}_\gamma$ aus $\mathfrak{M}$ ebenbürtig ist, dasselbe auch für $\mathfrak{S}_d$ gilt. Wäre γ letztes M, also $\mathfrak{T}_\gamma$ mit $\mathfrak{M}$ gleichbedeutend, so wäre die totale Zuordnung der Glieder von $\mathfrak{T}_\gamma$ zu denen von $\mathfrak{S}_c$ eine Zuordnung der M zu den A und wäre defektiv, d. h. $\mathfrak{M}$ wäre schwächer als $\mathfrak{A}$. Hiernach gibt es in $\mathfrak{M}$ ein auf γ unmittelbar folgendes Glied δ, und $\mathfrak{S}_d$ ist dem von α bis δ reichenden Abschnitt $\mathfrak{T}_\delta$ ebenbürtig.

Wäre $\mathfrak{A}$ verschiedenen Abschnitten von $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{T}_\lambda$, $\mathfrak{T}_\mu$ ebenbürtig, so wäre etwa $\mathfrak{T}_\lambda$ Abschnitt von $\mathfrak{T}_\mu$, also (Lehrs. 56) $\mathfrak{A}$ schwächer als $\mathfrak{T}_\mu$.

Lehrs. 58. Ist die mit α beginnende Reihe $\mathfrak{A}$ der A schwächer als die Reihe $\mathfrak{M}$ der M, so kann eine mit α beginnende, $\mathfrak{M}$ ebenbürtige Reihe angegeben werden, deren Abschnitt $\mathfrak{A}$ ist.

Bew. — $\mathfrak{A}$ ist (Lehrs. 57) ebenbürtig einem Abschnitt $\mathfrak{T}_\lambda$ von $\mathfrak{M}$, der mit dem Anfangsglied α von $\mathfrak{M}$ beginnt. Es sei μ das auf λ nächstfolgende, ω das letzte M. Fällt μ mit

ω zusammen, so fügen wir ein weiteres Ding an $\mathfrak{A}$ an. Anderenfalls sei B Gemeinname der M von μ bis ω, ϱ irgend ein von ω verschiedenes B, σ das nächstfolgende M; dann ist, wenn $\mathfrak{A}$ Abschnitt einer mit a beginnenden und $\mathfrak{T}_\varrho$ ebenbürtigen Reihe ist, dies auch für $\mathfrak{T}_\sigma$ richtig, also (Lehrs. 26) auch für $\mathfrak{M}$.

§ 8. Reihen mit gemeinschaftlichen Gliedern.

Lehrs. 59. Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Reihen, $\mathfrak{R}$ eine stärkere Reihe anderer Dinge, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den mit dem Anfangsglied von $\mathfrak{R}$ beginnenden Abschnitten $\mathfrak{S}_c$ und $\mathfrak{S}_d$ von $\mathfrak{R}$ ebenbürtig. Haben dann $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kein Glied gemein, so ist $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$ ebenbürtig, stärker als $\mathfrak{A}$, schwächer als $\mathfrak{A}$, je nachdem c dasselbe wie d, c vor d, c nach d (Lehrs. 53 u. 56).

Lehrs. 60. Ist auch $\mathfrak{R}'$ eine Reihe, die kein Glied von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ enthält und stärker ist als diese, und sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den mit dem Anfangsglied von $\mathfrak{R}'$ beginnenden Abschnitten $\mathfrak{T}_\gamma$ und $\mathfrak{T}_\delta$ von $\mathfrak{R}'$ ebenbürtig, so ist γ dasselbe wie δ, γ vor δ, γ nach δ in $\mathfrak{R}'$, je nachdem c dasselbe wie d, c vor d, c nach d in $\mathfrak{R}$, gleichviel ob $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Glieder gemein haben oder nicht.

Bew. — Haben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ kein Glied gemein, so ist (Lehrs. 53) $\mathfrak{S}_c$ ebenbürtig $\mathfrak{T}_\gamma$, $\mathfrak{S}_d$ ebenbürtig $\mathfrak{T}_\delta$. Fällt c mit d zusammen, so fällt $\mathfrak{S}_c$ mit $\mathfrak{S}_d$ und mithin (Lehrs. 57) $\mathfrak{T}_\gamma$ mit $\mathfrak{T}_\delta$, γ mit δ zusammen. Anderenfalls ist etwa c vor d in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_c$ schwächer als $\mathfrak{T}_\delta$ (Lehrs. 56), $\mathfrak{T}_\delta$ nicht Abschnitt von $\mathfrak{T}_\gamma$, folglich γ vor δ in $\mathfrak{R}'$.

Haben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ Glieder gemein, so benutze man eine Reihe $\mathfrak{R}''$ weiterer Dinge, die ebenfalls stärker ist als $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Def. 20. Unter Anwendung der Bezeichnung des Lehrs. 59 sagen wir, auch wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Glieder gemein haben: $\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{A}$ ebenbürtig, stärker als $\mathfrak{A}$, schwächer als $\mathfrak{A}$, je nachdem c dasselbe wie d, c vor d, c nach d in $\mathfrak{R}$.

Jede Reihe heiße sich selbst ebenbürtig.

Lehrs. 61. Nach dieser Begriffserweiterung bleiben die Lehrsätze des § 7 gültig. In Lehrs. 53 und 54 fallen die beschränkenden Voraussetzungen weg. Dagegen bleibt in den Lehrsätzen 52, 55, 58 für die Reihen, deren Möglichkeit be-

hauptet wird, bestehen, daß sie mit den anderen Reihen kein Glied gemein zu haben brauchen.

Lehrs. 62. Sind alle Glieder der Reihe 𝔄 Glieder der Reihe 𝔅, so ist 𝔄 schwächer als 𝔅 oder 𝔅 ebenbürtig, je nachdem 𝔅 noch andere Glieder enthält oder nicht.

§ 9. Menge von Dingen.

Lehrs. 63. Nach den Lehrsätzen 53, 61, 62 darf in den Aussagen: eine Reihe 𝔄 der Dinge A ist einer Reihe 𝔅 der Dinge B ebenbürtig, 𝔄 ist stärker als 𝔅, 𝔄 ist schwächer als 𝔅, jede Reihe durch jede andere Reihe derselben Dinge ersetzt werden, aber nicht durch jede Reihe überhaupt. Diese Eigenschaft hat außerdem nur noch die Aussage (Def. 6), daß ein Ding a in einer Reihe 𝔄 vorkommt

Es gibt im bisherigen Sinn kein Ding 𝔐 von der Art, daß man in den obigen Aussagen statt „eine Reihe 𝔄 der A“ auch sagen dürfte „das Ding 𝔐“, aber nicht in anderen Aussagen, z. B. in der Aussage: a ist in 𝔄 früher als b

Hierauf gründet sich die implizite Definition (vgl. § 1, 3):

Def. 21. In den obigen Aussagen, aber in keiner von ihnen unabhängigen wird statt „eine Reihe 𝔄 der A“ auch gesagt „das Ding 𝔐“, ebenso statt „eine Reihe 𝔅 der B“ „das Ding 𝔑“.

Lehrs. 64. Die Eigennamen 𝔐 und 𝔑 sind dann und nur dann gleichbedeutend, wenn die Gemeinnamen A und B es sind.

Daß 𝔐 behandelt werden darf, als wäre es Eigenname eines Dinges (§ 1, 3), hat den Sinn, daß auch nach dieser Erweiterung des Begriffes Ding die Grundsätze noch gelten. Demnach bleiben die Lehrsätze 1 bis 62 bestehen, wenn man die Definitionen 1 bis 20 beibehält, Lehrs. 63 Abs. 2 jedoch nur für den Fall, daß nicht alle A Dinge in dem bis dahin festgehaltenen Sinn sind.

Def. 22. Auch auf diesen Fall wird nunmehr Def. 21 (mithin auch der erste Teil von Lehrs. 64) ausgedehnt und nach jeder solchen Ausdehnung ebenso verfahren (Lehrs. 23).

Das Ding 𝔐 heißt eine Menge (Vielheit, Mehrheit) und zwar „die Menge der A“.

Statt „Glied der Menge“ sagen wir „Stück der Menge“.

Sind die A Glieder einer Paarreihe, so heißt die Menge der A auch „eine Paarmenge“ oder „das Paar der A“.

Lehrs. 65. Jede Menge aus einem Ding und nur noch einem ist eine Paarmenge. Einander benachbarte Glieder einer Reihe bilden eine Paarmenge.

Lehrs. 66. Die Menge der A ist sich selbst und jeder Reihe der A ebenbürtig.

Lehrs. 67. In den Lehrsätzen 49 bis 55 darf, auch nach der durch Lehrs. 61 ausgesprochenen Erweiterung, an jeder Stelle statt Reihe Menge, statt Paarreihe Paarmenge gesagt werden.

Lehrs. 68. Jede Menge, die schwächer ist als die mit α beginnende Reihe $\mathfrak{R}$, ist einem und nur einem mit α beginnenden Abschnitt von $\mathfrak{R}$ ebenbürtig.

Lehrs. 69. Ist die Menge $\mathfrak{N}$ keine Paarmenge, so kann man (Lehrs. 19) Mengen $\mathfrak{M}$ so angeben, daß alle Stücke von $\mathfrak{M}$ Stücke von $\mathfrak{N}$ sind, aber nicht umgekehrt.

Def. 23. Sind alle Stücke der Menge $\mathfrak{M}$ Stücke der Menge $\mathfrak{N}$, aber nicht umgekehrt, so heißt $\mathfrak{M}$ ein Teil von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{M}$.

Lehrs. 70. Ist $\mathfrak{M}$ Teil von $\mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{M}$ schwächer als $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ nicht Teil von $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{M}$ Teil von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ Teil von $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{M}$ Teil von $\mathfrak{P}$.

Def. 24. $\mathfrak{M}$ heißt kleiner als $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ größer als $\mathfrak{M}$.

Lehrs. 71. Zu jeder Menge gibt es größere, zu jeder, die nicht Paarmenge ist, kleinere.

Def. 25. Ist $\mathfrak{M}$ der Teil einer Menge $\mathfrak{N}$, der nur deren Stück z nicht enthält, so sagt man statt: eine Menge $\mathfrak{N}$ angeben, auch: z zu $\mathfrak{M}$ hinzufügen.

Lehrs. 72. Gilt eine Aussage für jede Paarmenge und steht fest, daß die Aussage, wenn sie für eine Menge gilt, auch nach Hinzufügung eines weiteren Stückes richtig bleibt, so gilt die Aussage für jede Menge.

Bew. — Der Satz folgt aus Lehrs. 27, da statt: Menge der Dinge D, gesagt werden kann: Menge der Glieder einer Reihe der Dinge D.

Lehrs. 73. Entstehen aus Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Mengen $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ durch Hinzufügung je eines Stückes, so ist $\mathfrak{P}'$ $\mathfrak{Q}'$

ebenbürtig, schwächer als $\mathfrak{Q}'$, stärker als $\mathfrak{Q}'$, je nachdem $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{Q}$ ebenbürtig, schwächer als $\mathfrak{Q}$, stärker als $\mathfrak{Q}$ war (Lehrs. 46 u. Def. 20).

§ 10. Zahl.

Lehrs. 74. Es sei $\mathfrak{R}$ eine mit e beginnende Reihe der Dinge X, nicht Paarreihe, $\mathfrak{S}_X$ der Abschnitt von e bis X, falls X von e verschieden. Dann kann man (Lehrs. 57 u. 61) zu jeder Menge $\mathfrak{N}$, die nicht stärker als $\mathfrak{R}$ ist, ein und nur ein von e verschiedenes Glied n der Reihe $\mathfrak{R}$ so angeben, daß der Abschnitt $\mathfrak{S}_n$ der Menge $\mathfrak{N}$ ebenbürtig ist.

Ist umgekehrt n ein von e verschiedenes X, so gibt es zum Abschnitt $\mathfrak{S}_n$ ebenbürtige Mengen.

Def. 26. Wir nennen die auf e folgenden X: der Reihe $\mathfrak{R}$ entnommene Zahlen, n die der Reihe $\mathfrak{R}$ entnommene Zahl der Menge $\mathfrak{N}$ oder die der Reihe $\mathfrak{R}$ entnommene Zahl oder Anzahl der Stücke von $\mathfrak{N}$.

Lehrs. 75. Sind irgendwelche Mengen $\mathfrak{M}$ angegeben, so kann eine mit e beginnende Reihe $\mathfrak{Z}$ angegeben werden, deren Abschnitt $\mathfrak{R}$ ist, und aus der für die angegebenen Mengen Zahlen entnommen werden können. Man kann $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden annehmen.

Bew. — Kann nicht schon aus $\mathfrak{R}$ für jedes $\mathfrak{M}$ eine Zahl entnommen werden, ist also mindestens ein $\mathfrak{M}$ stärker als $\mathfrak{R}$, so gibt es (Lehrs. 55 u 61) eine Reihe $\mathfrak{Z}_0$, die stärker ist als alle $\mathfrak{M}$, mithin auch als $\mathfrak{R}$. Von $\mathfrak{Z}_0$ führt Lehrs. 58 mit 61 zu $\mathfrak{Z}$.

Def. 27. Kommen in einer Menge $\mathfrak{M}$ Dinge D vor, und ist $\mathfrak{N}$ die Menge dieser D, n die der Reihe $\mathfrak{Z}$ entnommene Zahl der Menge $\mathfrak{N}$, so nennt man n die der Reihe $\mathfrak{Z}$ entnommene Zahl oder Anzahl der in $\mathfrak{M}$ vorkommenden D.

Unter Festhaltung von $\mathfrak{Z}$ sagt man ferner: $\mathfrak{M}$ enthält n Dinge D, nD. Enthält $\mathfrak{M}$ nur Dinge D, so nennt man $\mathfrak{M}$ eine Menge von nD, und sagt: $\mathfrak{M}$ besteht aus nD.

Def. 28. Kommt in einer Menge $\mathfrak{M}$ ein und nur ein Ding D vor, so nennt man e: die der Reihe $\mathfrak{Z}$ entnommene Zahl oder Anzahl der in $\mathfrak{M}$ vorkommenden D, und sagt: $\mathfrak{M}$ enthält eD.

Nunmehr heißt auch e eine Zahl. Alle Glieder der Reihe $\mathfrak{Z}$ sollen „die der Reihe $\mathfrak{Z}$ entnommenen Zahlen“ heißen.

Lehrs. 76. Die der Reihe $\mathfrak{Z}$ entnommenen Zahlen sind, sofern sie in $\mathfrak{R}$ (d. h. in einem mit e beginnenden Abschnitt von $\mathfrak{Z}$) vorkommen, die der Reihe $\mathfrak{R}$ entnommenen Zahlen.

Die der Reihe $\mathfrak{Z}$ entnommene Zahl der in der Menge $\mathfrak{M}$ enthaltenen D ist (Lehrs. 20), sofern sie in $\mathfrak{R}$ vorkommt, die der Reihe $\mathfrak{R}$ entnommene Zahl der D.

Ist n eine Zahl aus $\mathfrak{R}$, nicht die letzte, so ist (Lehrs. 21) die nächstfolgende Zahl aus $\mathfrak{R}$ die nächstfolgende aus $\mathfrak{Z}$; insbesondere ist die nächste Zahl nach e in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}$ dieselbe.

Def. 29. Ist eine Reihe als Zahlenreihe eingeführt, so soll weiterhin eine Reihe nur dann als Zahlenreihe eingeführt werden, wenn sie ein mit dem Anfangsglied e beginnender Abschnitt von jener ist oder jene von ihr.

Die Zahl e wird eins, die nächstfolgende zwei genannt.

Lehrs. 77. Die erste Zahl ist eins; die Zahl einer Menge ist stets von eins verschieden.

Die Zahl der Stücke einer Paarmenge ist zwei; eine Menge, deren Zahl zwei ist, ist eine Paarmenge.

Ist n eine von eins verschiedene Zahl, so ist n die Anzahl der Zahlen von eins bis n.

Lehrs. 78. Man entlehne die Bezeichnungen aus Lehrs. 75 und verstehe unter $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Mengen $\mathfrak{M}$. Sind dann $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ebenbürtig, so ist die Zahl ihrer Stücke dieselbe, und umgekehrt. Ist $\mathfrak{P}$ schwächer als $\mathfrak{Q}$, so geht die Zahl p von $\mathfrak{P}$ der Zahl q von $\mathfrak{Q}$ voran, und umgekehrt.

Bew. für den letzten Fall. — Ginge q vor p voran, so wäre (Lehrs. 20) $\mathfrak{S}_q$ Abschnitt von $\mathfrak{S}_p$ (Bezeichnung aus Lehrs. 74). Folglich (Lehrs. 62) wäre $\mathfrak{S}_q$ schwächer als $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{Q}$ schwächer als $\mathfrak{P}$.

Def. 30. Ist p die Zahl der Dinge D in einer Menge $\mathfrak{P}$, q die Zahl der Dinge E in einer Menge $\mathfrak{Q}$, und ist p dieselbe Zahl wie q, so sagt man: $\mathfrak{P}$ enthält ebensoviel (gleichviel) Dinge D, wie $\mathfrak{Q}$ Dinge E enthält.

Geht dagegen p vor q voran, so sagt man: $\mathfrak{P}$ enthält weniger D, als $\mathfrak{Q}$ E, oder: $\mathfrak{Q}$ enthält mehr E, als $\mathfrak{P}$ D enthält.

Lehrs. 79. Entstehen aus Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Mengen $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ durch Hinzufügung je eines Stückes, so enthält $\mathfrak{P}'$ ebensoviel Stücke wie $\mathfrak{Q}'$, weniger als $\mathfrak{Q}'$, mehr als $\mathfrak{Q}'$, je nachdem $\mathfrak{P}$ ebensoviel Stücke enthält wie $\mathfrak{Q}$, weniger als $\mathfrak{Q}$, mehr als $\mathfrak{Q}$.

Lehrs. 80. Entsteht aus der Menge $\mathfrak{P}$ von p Stücken die Menge $\mathfrak{P}'$ durch Hinzufügung eines Stückes, so ist die Anzahl der Stücke von $\mathfrak{P}'$ die nächste Zahl nach p.

Ist überhaupt $\mathfrak{Q}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{P}$, so enthält $\mathfrak{Q}$ mehr Stücke als $\mathfrak{P}$. Ist q die Zahl der Stücke von $\mathfrak{Q}$, p eine frühere Zahl als q, nicht eins, so gibt es Teilmengen aus $\mathfrak{Q}$ von p Stücken.

Lehrs. 81. Ist $\mathfrak{N}$ die Folge der Elemente A (Def. 5), so gibt es eine Reihe $\mathfrak{B}$ der A derart, daß, wenn α in $\mathfrak{N}$ früheres Element als β war, α in $\mathfrak{B}$ früheres Glied als β wird. Die Reihe $\mathfrak{B}$ kann durch jede konforme und nur durch eine solche ersetzt werden.

Bew. — Der Satz ist richtig für jede Folge von zwei Elementen. Es sei also $\mathfrak{N}$ eine Folge von mehr als zwei, etwa n Elementen, p eine Zahl zwischen eins und n, p' die nächste Zahl nach p; dann ist nur noch zu beweisen, daß der Satz, wenn er für jede Folge von p Elementen richtig ist, auch für jede Folge $\mathfrak{F}'$ von p' Elementen richtig ist. Nun entsteht aus $\mathfrak{F}'$ durch Fortlassen des letzten Elementes eine Folge $\mathfrak{F}$, und die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{F}$ ist p (Lehrs. 80).

§ 11. Gerade und ungerade Zahlen.

Def. 31. Die Zahl eins heißt eine ungerade Zahl; jede auf eine ungerade Zahl nächstfolgende heißt gerade, jede auf eine gerade Zahl nächstfolgende ungerade.

Lehrs. 82. Die Zahl zwei ist gerade, die nächste nach zwei ist ungerade.

Jede Zahl ist (Lehrs. 23) entweder gerade oder ungerade, und zwar schließt das eine das andere aus.

Von benachbarten Zahlen ist stets die eine gerade, die andere ungerade.

Lehrs. 83. Es werde $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{N}$ verschieden vorausgesetzt (Lehrs. 75). Dann enthält $\mathfrak{Z}$ außer zwei mindestens noch eine

gerade Zahl. Ist U Gemeinname für die ungeraden, G für die geraden Zahlen in $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$ die Teilreihe der U, $\mathfrak{G}$ die der G aus $\mathfrak{Z}$, so ist eins das erste U in $\mathfrak{U}$, zwei das erste G in $\mathfrak{G}$; folglich ist (Def. 11) eins die erste ungerade, zwei die erste gerade Zahl in $\mathfrak{Z}$. Das letzte U in $\mathfrak{U}$ ist die letzte ungerade, das letzte G in $\mathfrak{G}$ die letzte gerade Zahl in $\mathfrak{Z}$; diese Zahlen sind in $\mathfrak{Z}$ benachbart, und eine von ihnen die letzte.

In $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{G}$) benachbarte ungerade (gerade) Zahlen sind in $\mathfrak{Z}$ aufeinanderfolgende ungerade (gerade) Zahlen, und umgekehrt. Zwischen solchen liegt in $\mathfrak{Z}$ eine und nur eine Zahl, und zwar eine gerade (ungerade).

Ist von zwei Zahlen die eine ungerade (gerade) und zwischen ihnen in $\mathfrak{Z}$ eine und nur eine Zahl gelegen, so sind sie aufeinanderfolgende ungerade (gerade) Zahlen.

Zu jeder Zahl mit Ausnahme der eins (eins und zwei) gibt es eine nächstfrühere ungerade (gerade) Zahl. Zu jeder Zahl, die in $\mathfrak{Z}$ weder letzte noch letzte ungerade (gerade) ist, gibt es eine nächstspätere ungerade (gerade) Zahl.

Lehrs. 84. Der Abschnitt aus $\mathfrak{Z}$ von eins bis n werde mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnet. Sind dann a, c aufeinanderfolgende ungerade (gerade) Zahlen, a die frühere, b die zwischen a und c gelegene gerade (ungerade) Zahl (Lehrs. 83), so enthält $\mathfrak{S}_c$ außer den Gliedern von $\mathfrak{S}_a$ nur b und c.

Lehrs. 85. Ist g eine gerade Zahl, so enthält die Menge der Zahlen von eins bis g ebensoviel (r) ungerade wie gerade Zahlen.

Ist u eine ungerade Zahl, die nächste nach g, und ist r' die nächste Zahl nach r, so enthält die Menge der Zahlen von eins bis u r' ungerade und r gerade Zahlen.

Bew. des ersten Teils. — Die Behauptung ist für das erste Glied der Reihe $\mathfrak{G}$ richtig. Ist sie aber (Bezeichnungen aus Lehrs. 84) für ein Glied a der Reihe $\mathfrak{G}$ richtig, so gilt sie (Lehrs. 84 u. 79) auch für c.

§ 12. Ordnungszahlen.

Def. 32. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Reihe, a ihr Anfangsglied, b irgend ein nicht letztes Glied, b' das nächste nach b, also von a ver-

schieden. Man nennt eins die Ordnungszahl von a in $\mathfrak{A}$. Ist β (aus $\mathfrak{Z}$ entnommene) Ordnungszahl von b in $\mathfrak{A}$, β' die nächste Zahl nach β, so nennt man β' Ordnungszahl von b' in $\mathfrak{A}$.

Lehrs. 86. Ist $\mathfrak{Z}$ nicht schwächer als $\mathfrak{A}$ (Lehrs. 75), so kann man aus $\mathfrak{Z}$ für jedes Glied von $\mathfrak{A}$ eine und nur eine Ordnungszahl entnehmen. Die Ordnungszahl von b in $\mathfrak{A}$ ist die Anzahl der Glieder von a bis b.

Bew. — In $\mathfrak{A}$ sei a' das nächste Glied nach a, n die Anzahl der Glieder; dann ist zwei und nur zwei Ordnungszahl von a' und die Anzahl der Glieder von a bis a'. Der Satz ist also richtig für das erste der auf a folgenden Glieder, und mithin ist nur noch zu beweisen, daß der Satz, wenn er für ein in $\mathfrak{A}$ weder erstes noch letztes Glied b gilt, auch für b' richtig ist. In der Tat steht dann (Lehrs. 78) β in $\mathfrak{Z}$ vor n, läßt also eine nächstfolgende Zahl β' zu, und (Lehrs. 25 u. 73) die Menge der Zahlen von eins bis β' ist ebenbürtig der Menge der Glieder von a bis b' in $\mathfrak{A}$.

Lehrs. 87. Die Ordnungszahl des letzten Gliedes in $\mathfrak{A}$ ist n, die Ordnungszahlen der übrigen Glieder gehen n voran. Jede Zahl von eins bis n ist Ordnungszahl eines und nur eines Gliedes in $\mathfrak{A}$ (Lehrs. 57 mit 61).

Die spätere von zwei Ordnungszahlen gehört zu dem in $\mathfrak{A}$ späteren Gliede, die nächstspätere Ordnungszahl zum nächstspäteren Gliede. Die Ordnungszahlen der Glieder eines Abschnitts von $\mathfrak{A}$ sind die Glieder eines Abschnitts von $\mathfrak{Z}$, und umgekehrt.

Sind Reihen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ konform, so ist die Ordnungszahl jedes Gliedes in $\mathfrak{A}$ zugleich seine Ordnungszahl in $\mathfrak{A}'$, und umgekehrt.

Lehrs. 88. Die Anzahl der Ordnungszahlen, die in einer Reihe gewissen Gliedern zukommen, ist die Anzahl dieser Glieder.

Def. 33. Das Glied der Reihe $\mathfrak{A}$ mit der Ordnungszahl α heißt: das α^{te} Glied der Reihe.

Ist C Gemeinname für gewisse Glieder der Reihe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ die Teilreihe der C aus $\mathfrak{A}$, so heißt das $\varkappa^{\text{te}}$ Glied von $\mathfrak{C}$: das $\varkappa^{\text{te}}$ C in $\mathfrak{A}$.

Def. 34. Sind e und f Glieder der Reihe $\mathfrak{A}$, e vor f, und ist ν die Anzahl der Glieder von e bis f, so heißen die

Glieder von e bis f: die n aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe 𝔄 von e an, oder: von f an rückwärts; f heißt: das n^{te} Glied der Reihe 𝔄 von e an (vorwärts), e: das n^{te} von f an rückwärts.

Ist e erstes Glied von 𝔄, so heißen die Glieder von e bis f: die n ersten Glieder von 𝔄, f: das n^{te} vom Anfang an. Ist e nächstes Glied nach d, so heißen die Glieder von e bis f: die n nächsten nach d, e: das erste nach d, f: das n^{te} nach d.

Ist f letztes Glied von 𝔄, so heißen die Glieder von e bis f: die n letzten von 𝔄, e: das n^{te} vom Ende an. Ist f nächstes Glied vor g, so heißen die Glieder von e bis f: die n nächsten vor g, e: das n^{te} vor g, f: das erste vor g.

Lehrs. 89. Ist 𝔄 Abschnitt einer mit a beginnenden Reihe 𝔄′, so ist (Lehrs. 20) das α^{te} Glied in 𝔄 das α^{te} in 𝔄′. Das n^{te} Glied f in 𝔄 nach d ist das n^{te} Glied jedes mit e beginnenden, f enthaltenden Abschnittes von 𝔄.

Wird aus 𝔍 eine Zahl m entnommen, so ist m Ordnungszahl von m in 𝔍 und, wenn sie (Bezeichnungen wie in Lehrs. 74 u. 75) schon aus 𝔑 zu entnehmen war, auch in 𝔑.

Def. 35. Von dem α^{ten} Glied der Reihe 𝔄 sagt man: es steht in 𝔄 an der α^{ten} Stelle.

Lehrs. 90. In jeder Reihe sind die Glieder abwechselnd geradstellig und ungeradstellig, d. h.: Von benachbarten Gliedern ist stets das eine geradstellig, das andere ungeradstellig. Das erste Glied ist ungeradstellig.

Hiernach hängt es nicht von der benutzten Zahlenreihe ab, ob ein Glied der Reihe geradstellig oder ungeradstellig ist; ebensowenig, ob die Zahl der Glieder — also überhaupt die Zahl gewisser Dinge — gerade oder ungerade ist.

Lehrs. 91. Ist die Reihe 𝔄 der A ebenbürtig der Reihe 𝔄′ der A', und sind die A von den A' verschieden, so kann man den A die A' so zuordnen, daß je zwei einander zugeordnete Glieder dieselbe Ordnungszahl haben. Es ist dies die Zuordnung, bei der dem ersten A das erste A', benachbarten A benachbarte A' entsprechen.

Def. 36. Man sagt in diesem Fall, sofern Verwechslungen ausgeschlossen sind: den A sind die A' der Reihe nach zugeordnet.

Lehrs. 92. Ist 𝔑 die Folge gewisser Elemente, ε eines von ihnen, so hat ε in den Reihen 𝔅 (Bezeichnung aus Lehrs. 81) dieselbe Ordnungszahl.

Def. 37. Diese Ordnungszahl heißt: die Ordnungszahl des Elementes ε in 𝔑.

Lehrs. 93. Die Ordnungszahl des ersten Elementes in 𝔑 ist eins, benachbarte Elemente haben benachbarte Ordnungszahlen.

Ist 𝔑 eine Reihe, ε Angabe eines Dinges e, so hat e als Glied der Reihe 𝔑 dieselbe Ordnungszahl, wie ε als Element der Folge 𝔑.

Nach Lehrs. 87 ist jetzt folgende Definition berechtigt.

Def. 38. Folgen 𝔑 und 𝔑′ von gleichviel Elementen heißen konform, wenn die in ihnen an gleicher Stelle stehenden Elemente Angaben desselben Dinges sind.

Jede Folge heiße sich selbst konform.

Lehrs. 94. Ist die Reihe 𝔷 nicht schwächer als die Reihe 𝔄, so kann man eine Folge 𝔑 derart herstellen, daß die Folge ihrer ungeradstelligen Elemente eine mit 𝔄 konforme Reihe ist und in 𝔑 unmittelbar nach jedem dieser Elemente die ihm in 𝔄 zukommende aus 𝔷 entnommene Ordnungszahl angegeben wird.

§ 13. Reihenfolge.

Def. 39. Ist C Gemeinname für gewisse Glieder der Reihe 𝔄, ℭ Gemeinname für die mit der Teilreihe der C aus 𝔄 konformen Reihen, so sagen wir: die C stehen in 𝔄 gemäß einer Reihe ℭ, — auch: gemäß dem Dinge R.

Das Ding R heißt eine Reihenfolge der C, und zwar: die Reihenfolge der C in 𝔄.

Lehrs. 95. Die Reihenfolge der C in 𝔄 ist die Reihenfolge der C in ℭ.

Lehrs. 96. Konforme Reihen sind Reihen, die aus denselben Gliedern bestehen und sie gemäß derselben Reihenfolge enthalten, und umgekehrt.

Lehrs. 97. Nach jeder Reihe 𝔄 gewisser Dinge ist eine Reihe derselben Dinge möglich, deren Nachbarreihen Umkehrungen von aus 𝔄 entnommenen Nachbarreihen sind.

Bew. — Der Satz ist richtig für jede Reihe von zwei Gliedern (Lehrs. 39 u. 19). Es sei also 𝔄 eine Reihe von mehr als zwei, etwa n Gliedern, p eine Zahl zwischen eins und n, p' die nächste Zahl nach p; dann ist nur noch zu beweisen, daß der Satz, wenn er für jede Reihe von p Gliedern gilt, auch für jede Reihe 𝔈′ von p' Gliedern richtig ist. Nun entsteht aus 𝔈′ durch Fortlassen des ersten Gliedes a eine etwa mit b beginnende Reihe 𝔈, und die Anzahl der Glieder von 𝔈 ist p (Lehrs. 80); folglich ist nach 𝔈, mithin nach 𝔈′ eine aus den Gliedern von 𝔈 bestehende Reihe 𝔊 möglich, deren Nachbarreihen Umkehrungen von aus 𝔈 entnommenen Nachbarreihen sind, und die mit b endigt. Die durch Anfügen von a an 𝔊 entstehende Reihe 𝔊′ hat die gewünschte Eigenschaft.

In Erweiterung der Definition 16 geben wir

Def. 40. Sind 𝔄 und 𝔅 Reihen derselben Dinge, und sind die Nachbarreihen aus 𝔅 Umkehrungen von Nachbarreihen aus 𝔄, so heißt 𝔅 eine Umkehrung von 𝔄.

Lehrs. 98. Ist 𝔅 eine Umkehrung der Reihe 𝔄, so ist jede Paarreihe aus 𝔅 Umkehrung einer Paarreihe aus 𝔄.

Bew. — Der Satz ist richtig für jede Reihe von zwei Gliedern. Es sei also 𝔄 eine Reihe von mehr als zwei, etwa n Gliedern, p eine Zahl zwischen eins und n, p' die nächste Zahl nach p; dann ist nur noch zu beweisen, daß der Satz, wenn er für jede Reihe von p Gliedern gilt, auch für jede Reihe 𝔈′ von p' Gliedern richtig ist. Bezeichnet man nun mit 𝔊′ eine Umkehrung der Reihe 𝔈′, mit a das in 𝔈′ erste und mithin in 𝔊′ letzte Glied, mit 𝔈 und 𝔊 die aus 𝔈′ und 𝔊′ durch Fortlassung von a entstehenden Reihen, so ist 𝔈 eine Reihe von p Gliedern und 𝔊 eine Umkehrung von 𝔈. Der Annahme zufolge ist jede Paarreihe aus 𝔊′, die a nicht enthält, Umkehrung einer Paarreihe aus 𝔈′; dasselbe gilt aber auch von den Paarreihen aus 𝔊′, die a enthalten.

Lehrs. 99. Nach jeder Reihe 𝔄 ist eine Umkehrung möglich. Ist 𝔅 eine Umkehrung von 𝔄, so übertragen sich von 𝔄 auf 𝔅 und von 𝔅 auf 𝔄 die Begriffe: zwischen, benachbart; dagegen vertauschen sich: vor und nach, erstes und letztes, vorwärts und rückwärts, usw.

Ist 𝔅 Umkehrung von 𝔄, so ist 𝔄 Umkehrung von 𝔅, 𝔅 Umkehrung der mit 𝔄 konformen Reihen. Die Umkehrungen von 𝔄 sind die mit 𝔅 konformen Reihen.

Sind 𝔄 und 𝔅 Reihen derselben Dinge, und ist jede Paarreihe aus 𝔅 Umkehrung einer Paarreihe aus 𝔄, so ist 𝔅 Umkehrung von 𝔄. Dies gilt noch, wenn jede Nachbarreihe aus 𝔅 Umkehrung einer Paarreihe aus 𝔄 ist. (Beweis mittelst Lehrs. 33 u. 35 unter Zuhilfenahme einer Umkehrung von 𝔅.)

Def. 41. Sind 𝔄 und 𝔅 Reihen derselben Dinge D, 𝔅 eine Umkehrung von 𝔄, so heißt die Reihenfolge der D in 𝔅: die Umkehrung der Reihenfolge der D in 𝔄, oder: die umgekehrte Reihenfolge zur Reihenfolge der D in 𝔄.

Lehrs. 100. Ist C Gemeinname für gewisse Glieder der Reihe 𝔄, und ist 𝔅 eine Umkehrung von 𝔄, so ist die Reihenfolge der C in 𝔅 die Umkehrung ihrer Reihenfolge in 𝔄.

§ 14. Zählen.

Def. 42. Aufeinanderfolgende Zahlen aus der Zahlenreihe 𝔷 von eins an in der Reihenfolge angeben, wie sie in 𝔷 stehen, heißt: (von eins an) zählen unter Zugrundelegung von 𝔷.

Man kann „bis n zählen", „von m an zählen", „von λ bis μ zählen" (λ vor μ in 𝔷), „von μ an rückwärts zählen", „von μ bis λ rückwärts zählen".

Lehrs. 101. Sind Dinge D angegeben, und ist die Reihe 𝔷 nicht schwächer als die Menge der D, so kann man (Lehrs. 94) die Folge 𝔑 so herstellen, daß in 𝔑 die Folge der ungeradstelligen Elemente eine Reihe der D (gemäß einer Reihenfolge R), die Folge der geradstelligen einem mit eins beginnenden Abschnitt von 𝔷 konform ist und 𝔑 mit einem geradstelligen Element endigt. In 𝔑 wird zuletzt eine Zahl angegeben.

Def. 43. Eine Folge 𝔑 herstellen, heißt: die D mittelst 𝔷 zählen, vollständiger: die D in der Reihenfolge R mittelst 𝔷 zählen. Die in 𝔑 zuletzt angegebene Zahl heißt: das Ergebnis dieses Zählens.

Die in 𝔑 unmittelbar nach einem D angegebene Zahl heißt: die diesem D bei der Zählung zukommende Zahl.

Lehrs. 102. Diese Zahl ist die bei der Reihenfolge R dem D zukommende Ordnungszahl (siehe Lehrs. 87 u. 96).

Lehrs. 103. Angegebene Dinge können in jeder Reihenfolge (Lehrs. 94) gezählt werden; das Ergebnis des Zählens ist immer ihre Anzahl.

Lehrs. 104. Ist die Reihe $\mathfrak{Z}$ nicht schwächer als die Reihe $\mathfrak{A}$ von mindestens p Gliedern, so kann man die Folge $\mathfrak{N}_p$ so herstellen, daß darin die Folge $\mathfrak{A}_p$ der ungeradstelligen Elemente ein mit dem ersten Glied von $\mathfrak{A}$ beginnender Abschnitt von $\mathfrak{A}$, die Folge der geradstelligen einem Abschnitt aus $\mathfrak{Z}$ von eins bis p konform ist und $\mathfrak{N}_p$ mit einem geradstelligen Element endigt. In $\mathfrak{N}_p$ wird zuletzt p angegeben.

Def. 44. Bei gegebenem p eine Folge $\mathfrak{N}_p$ herstellen, heißt: p Glieder der Reihe $\mathfrak{A}$ vom Anfang an abzählen. $\mathfrak{A}_p$ heißt: das Ergebnis dieses Abzählens.

Man kann von einem beliebigen, nicht letzten, Gliede der Reihe $\mathfrak{A}$ an „q Glieder abzählen", von einem nicht ersten Gliede der Reihe an „rückwärts r Glieder abzählen", wenn q und r passend gewählt sind.

Def. 45. Statt: die Dinge D angeben, sagt man auch: sie aufzählen, sie herzählen.

Lehrs. 105. Man kann eine Folge $\mathfrak{N}$ so herstellen, daß in $\mathfrak{N}$ die Folge der ungeradstelligen Elemente einem mit eins beginnenden Abschnitt von $\mathfrak{Z}$ konform, die Folge der geradstelligen Elemente eine Reihe $\mathfrak{A}$ gewisser Dinge D ist, und $\mathfrak{N}$ mit einem geradstelligen Element endigt. In $\mathfrak{N}$ wird unmittelbar vor jedem D die ihm in $\mathfrak{A}$ zukommende Ordnungszahl k angegeben.

Def. 46. Man pflegt in einer solchen Folge $\mathfrak{N}$ die Ordnungszahlen k zu ersetzen durch k^{tens}, abgekürzt: k).

§ 15. Ziffern.

Def. 47. Kommt in einer Menge $\mathfrak{M}$ kein Ding mit dem Gemeinnamen D vor, so sagt man: $\mathfrak{M}$ enthält null D. Man nennt auch null eine Zahl und zwar die Zahl oder Anzahl der in $\mathfrak{M}$ vorkommenden D. Die früher eingeführten Zahlen heißen jetzt „natürliche".

Die Reihenfolge irgendwelcher, nicht notwendig natürlicher, Zahlen, gemäß der sie in einer Zahlenreihe — nötigenfalls nach Voranstellung der Null — vorkommen können, heißt ihre natürliche Reihenfolge. Die bei der natürlichen Reihenfolge frühere (spätere) Zahl heißt die niedrigere (höhere).

Die Zahl null heißt eine gerade Zahl.

Ist q die Zahl der Dinge E in einer Menge $\mathfrak{O}$, und ist q nicht null, so sagt man: $\mathfrak{M}$ enthält weniger D als $\mathfrak{O}$ E, oder: $\mathfrak{O}$ enthält mehr E, als $\mathfrak{M}$ D enthält. Ist dagegen q null, so sagt man: $\mathfrak{M}$ enthält ebensoviel (gleichviel) Dinge D, wie $\mathfrak{O}$ E enthält. (Vgl. Def. 30.)

Lehrs. 106. Man kann die Zahlenreihe $\mathfrak{Z}$ so wählen, daß sie mit dem Abschnitt

$$e\,f\,g\,h\,i\,k\,l\,m\,n\,o$$

beginnt, wo (Def. 29) den Zahlen e, f die Namen „eins, zwei" zukommen.

Def. 48. Die Zahlen g, h, i, k, l, m, n, o heißen: drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn.

Die Zahlen null (0), eins (1), zwei (2), drei (3), vier (4), fünf (5), sechs (6), sieben (7), acht (8), neun (9) heißen die Ziffern.

Lehrs. 107. Die Anzahl der Ziffern ist zehn.

Def. 49. Jede Folge aus Angaben von Ziffern, die nicht mit einer 0 (d. h. mit einer Angabe der 0) beginnt, heiße eine Ziffernfolge, und zwar eine n-stellige, wenn sie aus n Angaben besteht.

Def. 50. Die Ziffernfolgen:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29,
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59,
60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69,
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79,
80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89,
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100,

unter denen konforme nicht vorkommen, dienen in dieser Reihenfolge als Namen für aufeinanderfolgende Zahlen von zehn an, wobei statt jeder Ziffernfolge eine konforme angewendet werden kann.

Wir wählen nunmehr die Zahlenreihe $\mathfrak{Z}$ so, daß sie die Zahlen von 1 bis 100 und noch weitere Glieder enthält.

Def. 51. Ersetzt man in einer Ziffernfolge $\mathfrak{U}$, die nicht aus lauter Neunen besteht, die letzte (bzw. die einzige) von 9 verschiedene Ziffer durch die nächsthöhere, jede etwa folgende 9 durch 0, so heiße jede so entstehende Ziffernfolge $\mathfrak{U}'$: der $\mathfrak{U}$ vorwärts angeschlossen.

Dasselbe gilt, wenn man einer nur aus Neunen bestehenden Ziffernfolge eine **1** voranstellt und jede 9 durch eine 0 ersetzt.

Ersetzt man in einer Ziffernfolge $\mathfrak{V}$, die nicht aus einer 1 und lauter Nullen besteht, die letzte (bzw. die einzige) von 0 verschiedene Ziffer durch die nächstniedrigere, jede etwa folgende 0 durch 9, so heiße jede so entstehende Ziffernfolge $\mathfrak{V}'$: der $\mathfrak{V}$ rückwärts angeschlossen.

Dasselbe gilt, wenn man in einer Ziffernfolge, die mit einer 1 beginnt, auf die nur Nullen (mehr als eine) folgen, die 1 fortläßt und jede 0 durch eine 9 ersetzt.

Lehrs. 108. Der Ziffernfolge $\mathfrak{U}'$ ist $\mathfrak{U}$ rückwärts, der $\mathfrak{V}'$ ist $\mathfrak{V}$ vorwärts angeschlossen; dagegen ist $\mathfrak{U}'$ der $\mathfrak{U}$ nicht rückwärts, $\mathfrak{V}'$ der $\mathfrak{V}$ nicht vorwärts angeschlossen.

In der Beziehung: $\mathfrak{W}'$ vorwärts (rückwärts) angeschlossen an $\mathfrak{W}$, können $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ durch ihnen konforme Ziffernfolgen und nur durch solche ersetzt werden.

Die Ziffernfolge 10 ist keiner anderen vorwärts angeschlossen.

Lehrs. 109. Jede zweistellige Ziffernfolge ist einer und nur einer der in Def. 50 aufgestellten konform.

Bei der dortigen Reihenfolge folgt unmittelbar auf jede zweistellige Ziffernfolge eine ihr vorwärts angeschlossene.

Lehrs. 110. Ist $\mathfrak{F}$ eine mit 10 beginnende Reihe von Ziffernfolgen, und folgt in $\mathfrak{F}$ auf jede nicht letzte Ziffernfolge unmittelbar eine ihr vorwärts angeschlossene, so sind die Glieder von $\mathfrak{F}$ einander nicht konform.

Bew. — Der Satz ist richtig, wenn $\mathfrak{F}$ eine Paarreihe ist; es ist also nur noch zu beweisen, daß der Satz, wenn er für einen vom ersten Gliede bis zu einem nicht letzten $\mathfrak{U}$ reichenden Abschnitt $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{F}$ gilt, auch nach Hinzufügung des nächstfolgenden Gliedes $\mathfrak{U}'$ richtig bleibt, d. h. daß $\mathfrak{U}'$ keinem Glied von $\mathfrak{S}$ konform ist. Nun ist $\mathfrak{U}'$ dem ersten Glied von $\mathfrak{S}$ nicht konform (Lehrs. 108); nehmen wir also an, $\mathfrak{U}'$ wäre einem anderen Glied $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{S}$ konform, und nennen wir $\mathfrak{V}'$ das nächstfrühere. Dann wäre $\mathfrak{V}$ vorwärts angeschlossen an $\mathfrak{V}'$ und $\mathfrak{U}$, ohne daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}'$ konform wären.

Lehrs. 111. Man bilde eine mit 1 beginnende Reihe $\mathfrak{G}$ derart, daß auf jede Ziffer außer 9 die nächsthöhere Ziffer, auf 9 eine Ziffernfolge 10, auf 10 und jede andere nicht letzte Ziffernfolge eine ihr vorwärts angeschlossene unmittelbar folgt. Dann sind die ersten 9 Glieder von $\mathfrak{G}$ die Ziffern von 1 bis 9 in der natürlichen Reihenfolge, und der Abschnitt vom zehnten Gliede an ist eine Folge $\mathfrak{F}$. Konforme Ziffernfolgen kommen daher in $\mathfrak{G}$ nicht vor (Lehrs. 110).

Jeder mit 1 beginnende, mehr als 10 Glieder enthaltende Abschnitt einer $\mathfrak{G}$ ist selbst eine $\mathfrak{G}$.

In den Reihen $\mathfrak{G}$ an derselben Stelle stehende Ziffernfolgen sind konform, nicht aber an verschiedenen Stellen stehende.

Lehrs. 112. Zu jeder Menge kann man Reihen $\mathfrak{G}$ derart bilden, daß die Menge einem mit 1 beginnenden Abschnitt von $\mathfrak{G}$ ebenbürtig ist (Lehrs. 72 u. 73).

Ist m eine Zahl aus dem Abschnitt der Zahlenreihe von 1 bis 100 (Def. 50), n eine auf 100 folgende Zahl, $\mathfrak{N}$ eine Reihe $\mathfrak{G}$ von mindestens n Gliedern, so ist das m^{te} Glied von $\mathfrak{N}$ Name der Zahl m, das n^{te} Glied eine Ziffernfolge, die keiner der in Def. 50 aufgeführten konform ist.

Def. 52. Das n^{te} Glied der Reihe $\mathfrak{N}$ und jede konforme Ziffernfolge dient als Name der Zahl n.

Ein solcher Name von n, ebenso wie jeder der in Def. 50 eingeführten Zahlennamen, heißt dekadischer Name, Name im dekadischen Positionssystem (dekadischen System, Dezimalsystem); desgleichen die diesem System zugrunde liegenden Ziffernnamen.

Lehrs. 113. In jeder Reihe 𝔖 ist das α^{te} Glied Name der Zahl α. Jede Zahl, die nicht eine Ziffer ist, wird durch eine gewisse Ziffernfolge und die ihr konformen bezeichnet.

Sind β und β' Zahlen, die auf 9 folgen, 𝔘 und 𝔘′ als ihre Namen dienende Ziffernfolgen, so ist 𝔘′ der 𝔘 vorwärts angeschlossen, wenn β' auf β unmittelbar folgt, und umgekehrt.

Def. 53. Die Zahlen 1 bis 9 heißen einstellig. Eine Zahl, deren Name eine r-stellige Ziffernfolge ist, heißt r-stellig.

Lehrs. 114. Besteht eine Zahl (d. h. ihr Name) aus lauter Neunen, so folgt unmittelbar eine aus einer Eins und lauter Nullen bestehende Zahl von nächsthöherer Stellenzahl.

Folgt die Zahl β auf α, so geht die Stellenzahl von β der von α nicht voran.

Lehrs. 115. Es gibt Zahlen von beliebiger Stellenzahl.

Die erste Zahl mit einer gewissen Stellenzahl (nicht eins) besteht aus einer Eins und lauter Nullen, die letzte aus lauter Neunen.

Bew. — Da der Satz für die Stellenzahl 2 richtig und eine dreistellige Zahl vorhanden ist, so beweist man — unter Einführung einer auf 2 folgenden Zahl q und der nächstniedrigeren p — für den Fall, daß eine q-stellige Zahl vorhanden ist, weiter: 1. Es gibt eine q-stellige Zahl, die aus einer Eins und lauter Nullen besteht; dieser geht keine q-stellige Zahl voran. 2. Es gibt auch p-stellige Zahlen; die erste besteht aus einer Eins und lauter Nullen, die letzte aus lauter Neunen. 3. Entsteht aus einer p-stelligen Zahl u, auf die unmittelbar u' folgt, durch Anhängen einer Null eine Zahl v, so entsteht aus u' ebenso eine Zahl v', und zwar ist v' die zehnte Zahl nach v. 4. Aus jeder p-stelligen Zahl entsteht durch Anhängen einer Null, und mithin durch Anhängen irgend einer Ziffer, eine q-stellige Zahl, insbesondere durch Anhängen einer Neun an die letzte p-stellige eine aus lauter Neunen bestehende q-stellige. 5. Es gibt Zahlen von der unmittelbar auf q folgenden Stellenzahl.

Lehrs. 116. Jede Ziffernfolge ist Name einer Zahl.

Beweis beruht auf Punkt 4 des vorigen Beweises.

Lehrs. 117. Von zwei gleichstelligen Zahlen enthält die höhere an der verschieden besetzten Stelle, der keine verschieden besetzte Stelle vorangeht, die höhere Ziffer.

Bew. — Für benachbarte Zahlen folgt der Satz aus Lehrs. 113. Es ist also nur noch zu beweisen, daß der Satz, wenn er für irgend zwei gleichstellige Zahlen u und v gilt, wo v die höhere ist und auf v unmittelbar eine Zahl w von ebensoviel Stellen folgt, auch für u und w richtig ist.

§ 16. Gleich, größer, kleiner.

Def. 54. Daß die Namen α und β dasselbe Ding bedeuten, drückt man folgendermaßen aus:

$\alpha = \beta$ (α gleich β), oder: $\beta = \alpha$ (β gleich α).

Die Aussage, daß zwei Namen dasselbe Ding bedeuten, heißt eine Gleichung.

Daß die Namen α und β nicht dasselbe Ding bedeuten, drückt man folgendermaßen aus:

$\alpha \neq \beta$ (α ungleich β), oder: $\beta \neq \alpha$ (β ungleich α).

Lehrs. 118. Ist $\alpha = \beta$ und $\beta = \gamma$ (oder: bestehen die Gleichungen $\alpha = \beta$ und $\beta = \gamma$), so ist $\alpha = \gamma$. Denn die Namen α und γ bedeuten dann dasselbe Ding β.

Ist $\alpha = \beta$ und $\beta \neq \gamma$, so ist $\alpha \neq \gamma$.

Lehrs. 119. Ist m die Zahl der Stücke einer Menge $\mathfrak{M}$, n die einer größeren Menge $\mathfrak{N}$, so ist nach Lehrs. 78 in Verbindung mit Lehrs. 70, Def. 24 und 47 die Zahl n höher als m.

Def. 55. Ist $\varkappa$ irgend eine Zahl, λ eine höhere, so heißt λ größer als $\varkappa$, $\varkappa$ kleiner als λ; man schreibt $\lambda > \varkappa$, $\varkappa < \lambda$

Man sagt dann auch: λ ist mehr als $\varkappa$, $\varkappa$ weniger als λ; λ übersteigt, überschreitet, übertrifft $\varkappa$; $\varkappa$ erreicht λ nicht, bleibt zurück hinter λ.

Im Fall $\varkappa = \lambda$ sagt man auch: $\varkappa$ ist ebensogroß, ebensoviel wie λ, $\varkappa$ hat denselben Wert wie λ.

Die Aussage, daß zwei Namen nicht dasselbe Ding bedeuten, oder, daß eine Menge oder Zahl größer oder kleiner ist als eine andere, heißt eine Ungleichung.

In jeder Gleichung oder Ungleichung heißt der zuerst angegebene Name die linke, der andere die rechte Seite.

Lehrs. 120. Von zwei Zahlen ist stets die eine die kleinere, die andere die größere.

Ist $\varkappa < \lambda$, $\lambda < \mu$, so ist $\varkappa < \mu$.

Zu jeder Zahl gibt es größere Zahlen.

Def. 56. Im Fall $\varkappa < \lambda$, $\lambda < \mu$ schreibt man: $\varkappa < \lambda < \mu$, $\mu > \lambda > \varkappa$, und sagt: λ liegt der Größe nach zwischen (in der Regel kurz: zwischen) $\varkappa$ und μ (μ und $\varkappa$).

Lehrs. 121. Sind verschiedene Zahlen angegeben, so kann man sie der Größe nach (aufsteigend) ordnen, d. h. man kann aus ihnen eine Reihe bilden, in der die kleinere Zahl immer der größeren vorangeht. Von angegebenen Zahlen ist stets eine die kleinste, eine die größte.

Lehrs. 122. 0 ist die kleinste Zahl. Zu jeder Zahl außer 0 und 1 gibt es kleinere Zahlen.

Nur zwischen bei der natürlichen Reihenfolge benachbarten Zahlen liegt der Größe nach keine Zahl.

Zu jeder Zahl gibt es eine nächstgrößere, zu jeder Zahl außer 0 eine nächstkleinere.

Lehrs. 123. Da nur 0 keine natürliche Zahl ist, und 2 die nächstgrößere zu 1, so folgt: 1 ist die kleinste natürliche Zahl; zu jeder natürlichen Zahl außer 1 und 2 gibt es kleinere natürliche Zahlen; zu jeder natürlichen Zahl außer 1 gibt es eine nächstkleinere natürliche Zahl.

Lehrs. 124. Gilt eine Aussage für die Zahl m, die kleiner sei als die Zahl p, und weiß man, daß die Aussage, wenn sie für eine vor p, aber nicht vor m vorangehende Zahl gilt, auch für die nächstgrößere richtig ist, so ist die Aussage für alle Zahlen von m bis p richtig.

Gilt eine Aussage für die Zahl m und weiß man, daß die Aussage, wenn sie für eine Zahl $\geq m$ gilt, auch für die nächstgrößere richtig ist, so ist die Aussage für alle Zahlen von m an richtig.

§ 17. Addition.

Lehrs. 125. Sind a und b natürliche Zahlen (d. h. ist a eine natürliche Zahl, b dieselbe oder eine andere natürliche Zahl), so kann ein und nur ein mit 1 beginnender Abschnitt $\mathfrak{S}$

der Zahlenreihe (Def. 29) angegeben werden, in dem a vorkommt und b Zahlen auf a folgen (Lehrs. 124).

In der natürlichen Zahlenreihe (d. h. in jedem mit 1 beginnenden Abschnitt der Zahlenreihe, der in Betracht kommen kann) ist die letzte Zahl s des Abschnittes $\mathfrak{S}$ die b^{te} Zahl nach a, a die b^{te} vor s. Daher ändert sich s, wenn man a oder b ändert. Durch die Folge $a\ b$ (d. h. durch jede der — einander konformen — Folgen, die aus dem Zeichen $a\ b$ herauszulesen sind; vgl. Def. 62 und 63) ist s bestimmt.

Def. 57. Die Zahl s heißt die Summe der Folge $a\ b$.

Man bezeichnet sie auch mit: a vermehrt (vergrößert) um b, a plus b, $a + b$, nötigenfalls: $(a + b)$.

Man nennt (vgl. Def. 60) a das erste Glied (Augendus), b das zweite Glied (Addendus, Incrementum) des „Ausdrucks"*) $a + b$; wo man ohne Gefahr das Zeichen s wie eine Abkürzung für den Ausdruck $a + b$ behandeln kann, auch: der Summe s.

Für die Summe der Folge $a\ b$ einen anderen Namen — insbesondere den dekadischen — ermitteln, heißt: b zu a addieren (hinzufügen, hinzuzählen), a um b vermehren (vergrößern).

Lehrs. 126. Es ist $a + 1$ die (bei der natürlichen Reihenfolge) auf a (unmittelbar) folgende, $a + (n + 1)$ die auf $a + n$ folgende Zahl.

Dieser Satz vertritt die Definition von $a + b$. (Lehrs. 124 und Def. 32.)

Lehrs. 127. Gilt eine Aussage für die Zahl 1, und weiß man, daß die Aussage, wenn sie für eine natürliche Zahl n gilt, auch für $n + 1$ richtig ist, so ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen richtig. (Vollständige Induktion in der Form des „Schlusses von n auf $n + 1$".)

*) Unter einem Ausdruck versteht man einen zusammengesetzten Namen, insbesondere einen in abgekürzter mathematischer Schrift. Dekadische Zahlennamen (im bisherigen Sinn) gelten jedoch nicht als Ausdrücke.

Wird bei einer Zusammensetzung ein zusammengesetzter Name benutzt, so muß er zur Verhütung von Undeutlichkeit durch Klammern oder andere Zusammenfassungszeichen herausgehoben werden, soweit dies nicht durch besondere Regeln überflüssig wird.

Lehrs. 128. Zu jeder natürlichen Zahl kann man jede natürliche Zahl addieren.

Es ist: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$.

Bew. des zweiten Teils. — Die „Formel“*) $(a + b) + c = a + (b + c)$ ist richtig für $c = 1$. Ist aber $(a + b) + n = a + (b + n)$, so folgt $(a + b) + (n + 1) = \big((a + b) + n\big) + 1 = \big(a + (b + n)\big) + 1 = a + \big((b + n) + 1\big) = a + \big(b + (n + 1)\big)$, allgemein (Lehrs. 127): $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Für $a = 1$ ist $a + 1 = 1 + a$, folglich für jedes a; denn ist $n + 1 = 1 + n$, so ist $(n + 1) + 1 = (1 + n) + 1 = 1 + (n + 1)$.

Hiermit ist die Formel $a + b = b + a$ für $b = 1$ bewiesen. Ist aber $a + n = n + a$, so ist $a + (n + 1) = (a + n) + 1 = (n + a) + 1 = n + (a + 1) = n + (1 + a) = (n + 1) + a$.

Def. 58. Da hiernach die Summe s der Folge a b sich mit der Summe der Folge b a deckt, so nennt man, selbst im Falle $a = b$, s die Summe aus (von) a und b, die Summe der Zahlen a und b, und auch a einen Addenden. Man sagt (vgl. Def. 61): a + b hat die Glieder (Addenden, Summanden, Posten) a und b.

Def. 59. Man dehnt die Addition auf die Zahl 0 aus, indem man setzt:

$$a + 0 = a,\ 0 + b = b,\ 0 + 0 = 0.$$

Man sagt: 0 kann als Addend weggelassen werden.

Lehrs. 129. Diese Definition ist notwendig und hinreichend, wenn Lehrs. 126 auch nach Einbeziehung der 0 gelten, d. h. wenn auch dann $\alpha + 1$ die auf α folgende, $\alpha + (\nu + 1)$ die auf $\alpha + \nu$ folgende Zahl sein soll.

Bew. der Notwendigkeit. — Da $0 + 1 = 1$, $(\alpha + 0) + 1 = \alpha + (0 + 1) = \alpha + 1$ werden soll, so muß $\alpha + 0 = \alpha$, d. h. $a + 0 = a$, $0 + 0 = 0$ gesetzt werden; und weiter $0 + b = b$; denn, muß $0 + n = n$, so muß auch $0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$ gesetzt werden.

Lehrs. 130. Für die Summe gelten folgende Sätze, in denen a, b, c auch 0 bedeuten können:

---

*) Unter einer Formel versteht man einen Lehrsatz in abgekürzter mathematischer Schrift.

1. Zu jeder Zahl kann man jede addieren
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. $a + b \quad = b + a$.
4. $a + 0 \quad = a$.

Versteht man unter n' die 0 im Falle $n = 0$, die nächste Zahl nach n im Falle eines ungeraden n, die nächste Zahl vor n im Falle eines von 0 verschiedenen geraden n, so kann n' jede Zahl bedeuten, und jedem $n' = \nu$ entspricht ein und nur ein $n = \nu_0$, nämlich ν'. Wird nun vorübergehend ein Zeichen $+\!\!\!+$ durch die Gleichung

$$a +\!\!\!+ b = (a' + b')_0$$

für beliebige a, b definiert, so kommt:

$$(a +\!\!\!+ b) +\!\!\!+ c = (a' + b')_0 +\!\!\!+ c = \big((a' + b') + c'\big)_0$$
$$= \big(a' + (b' + c')\big)_0 = a +\!\!\!+ (b' + c')_0 = a +\!\!\!+ (b +\!\!\!+ c),$$
$$a +\!\!\!+ b = (a' + b')_0 = (b' + a')_0 = b +\!\!\!+ a,$$
$$a +\!\!\!+ 0 = (a' + 0)_0 = a;$$

dagegen beispielsweise $2 +\!\!\!+ 1 = 4$, $2 +\!\!\!+ 2 = 1$. Hiernach sind von den Sätzen 1 bis 4 unabhängig die Sätze:

5. $a + 1$ ist die nächste Zahl nach a (überhaupt $a + b$ für $b \neq 0$ die b^{te} Zahl nach a, $a + b$ immer die $(b + 1)^{\text{te}}$ Zahl von a an).
6. Für $c > b$ ist $a + c > a + b$ (Lehrs. 89). Insbesondere ist $a + b > a$ für $b > 0$.

Daß Satz 5 keine Folge der fünf übrigen dieser Sätze ist, erkennt man aus folgendem: Versteht man unter n' die 0 im Falle $n = 0$, sonst $n + 1$, so kann n' jede Zahl außer 1 bedeuten; jedem $n' = \nu$ entspricht ein und nur ein $n = \nu_0$, nämlich 0 im Falle $\nu = 0$, sonst die ν vorangehende Zahl; $a' + b'$ wird nie 1. Wird nun wieder das Zeichen $+\!\!\!+$ wie oben definiert, so gelten die den Sätzen 1 bis 4 entsprechenden Beziehungen. Es ist auch für $c > b$:

$$a +\!\!\!+ c = (a' + c')_0 = \big((a' + c) + 1\big)_0 = a' + c > a' + b > a +\!\!\!+ b;$$

aber beispielsweise $1 +\!\!\!+ 1 = 3$.

Lehrs. 131. Für $p > 0$, $q > 0$ ist das $(p + q)^{\text{te}}$ Glied einer Reihe das q^{te} nach dem p^{ten}, das $(q + 1)^{\text{te}}$ vom p^{ten} an. Das p^{te} Glied ist das q^{te} vor dem $(p + q)^{\text{ten}}$, das $(q + 1)^{\text{te}}$ vom $(p + q)^{\text{ten}}$ an rückwärts. (Def. 34.)

Lehrs. 132. Gehört zu jeder Zahl i eine Zahl a_i derart, daß durchweg $a_{n+1} > a_n$, so ist $a_i \geqq i$, und zwar durchweg $a_i > i$, wenn $a_0 > 0$. Ist $g \geqq a_0$, so gibt es eine und nur eine Zahl i derart, daß $a_i \leqq g < a_{i+1}$ und mithin $a_p > g$ für alle $p > i$.

Gehört zu jeder Zahl $i \leqq g$ eine Zahl a_i derart, daß durchweg $a_{n+1} < a_n$, so ist $g \leqq a_0$. Ist $a_g > 0$, so ist $g < a_0$.

§ 18. Permutationen.

Def. 60. Ist das i^{te} Element der Folge $\mathfrak{F}$ Angabe des Dinges d, so heißt d das i^{te} Glied der Folge $\mathfrak{F}$. Man sagt: d steht in $\mathfrak{F}$ an der i^{ten} Stelle. Steht d in $\mathfrak{F}$ an α Stellen, so nennt man α die Häufigkeit von d in $\mathfrak{F}$ und sagt: α Glieder von $\mathfrak{F}$ sind $= d$, $\mathfrak{F}$ enthält α Glieder d.

Anm. — Was bei der Reihe für die Glieder galt, gilt nicht allgemein bei der Folge. Ist z. B. d das i^{te} und das l^{te} Glied von $\mathfrak{F}$, e das k^{te}, $i < k < l$, so steht d in $\mathfrak{F}$ vor und nach sich selbst, vor und nach e.

Lehrs. 133. Kommt jedes Ding, das in einer von zwei Folgen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ vorkommt, auch in der anderen und zwar mit derselben Häufigkeit vor, so ist die Anzahl n der Elemente von $\mathfrak{F}$ zugleich die der Elemente von $\mathfrak{F}'$.

Bew. — Der Satz ist richtig für $n = 2$. Um ihn für $n > 2$ zu beweisen, nehmen wir an, daß er für die nächstkleinere Zahl $\nu\,(> 1)$ bewiesen ist, und ersetzen nötigenfalls $\mathfrak{F}'$, ohne die Anzahl der Elemente und die vorausgesetzte Beziehung zu $\mathfrak{F}$ zu ändern, durch eine Folge, in der zuletzt dasselbe Ding angegeben wird, wie in $\mathfrak{F}$. Bleiben dann durch Weglassen des letzten Elementes aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ die Folgen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ zurück, so ist ν die Elementenzahl für $\mathfrak{E}$, mithin auch für $\mathfrak{E}'$.

Def. 61. Die Folgen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ heißen Folgen derselben Glieder. Wird das i^{te} Glied von $\mathfrak{F}$ mit a_i, d. h. a mit der Nummer (dem Index, Stellenzeiger) i, bezeichnet, so sagt man von der Folge $\mathfrak{F}$ und auch von $\mathfrak{F}'$, daß sie eine Folge der Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist; oder: eine Folge der a_i für $i = 1, 2, \ldots, n$; oder kurz: eine Folge der a, wenn keine Undeutlichkeit zu

befürchten ist. Man nennt n auch die Anzahl der Glieder von $\mathfrak{F}$ (oder $\mathfrak{F}'$), kurz: die Anzahl der a.

Anm. — Der für die Glieder von $\mathfrak{F}$ eingeführte „allgemeine Buchstabe" a ist, wenn $\mathfrak{F}$ keine Reihe ist, nicht überall als Gemeinname der Dinge, die Glieder von $\mathfrak{F}$ sind, anwendbar. Z. B. die Anzahl dieser Dinge ist dann nicht die Anzahl der a.

Lehrs. 134. Folgen derselben Glieder haben dieselbe Gliederzahl.

Def. 62. Ist Φ Gemeinname für die mit $\mathfrak{F}$ konformen Folgen, so sagen wir: die a stehen in $\mathfrak{F}$ gemäß einer Folge Φ, auch: gemäß dem Dinge R.

Das Ding R heißt eine Reihenfolge der a und zwar: die Reihenfolge der a in $\mathfrak{F}$. Sie werde mit $a_1\ a_2 \cdot\cdot\ a_n$ bezeichnet.

Lehrs. 135. Konforme Folgen sind Folgen, in denen dieselben Glieder und zwar gemäß derselben Reihenfolge stehen, und umgekehrt.

Def. 63. Eine oder mehrere mit $\mathfrak{F}$ nicht konforme Folgen der a herstellen, heißt: die a in $\mathfrak{F}$ (oder R) permutieren (umstellen), auch: $\mathfrak{F}$ (oder R) permutieren.

Jede von R verschiedene Reihenfolge der a heißt eine Permutation von R (oder $\mathfrak{F}$).

Eine oder mehrere Folgen der a herstellen, gleichviel ob mit $\mathfrak{F}$ konform oder nicht, heißt: die a permutieren. Deshalb ist es üblich, jede Reihenfolge der a, auch R selbst, eine Permutation von R oder eine Permutation der a zu nennen.

Das i^{te} Glied von $\mathfrak{F}$ heißt auch: das i^{te} Glied bei der Reihenfolge R, das i^{te} Glied der Permutation R.

Lehrs. 136. Wird das k^{te} Glied von $\mathfrak{F}'$ mit b_k bezeichnet, so gibt es eine Permutation $i_1\ i_2 \cdot\cdot\ i_n$ der Zahlen von 1 bis n derart, daß $b_k = a_{i_k}$ für $k = 1 \cdot\cdot n$.

Ist $i_1\ i_2 \cdot\cdot\ i_n$ eine Permutation der Zahlen von 1 bis n, und wird a_{i_k} mit b_k bezeichnet, so gibt es eine Folge $\mathfrak{F}'$ der a, in der b_k das k^{te} Glied ist für $k = 1 \cdot\cdot n$.

Lehrs. 137. Zu jeder Folge $\mathfrak{A}$ kann man eine Folge $\mathfrak{B}$ derselben Glieder bilden, in der das erste Glied von $\mathfrak{A}$ als letztes steht, jedes andere um eine Stelle früher, als in $\mathfrak{A}$; ferner eine Folge $\mathfrak{C}$ derselben Glieder, in der das letzte Glied

von $\mathfrak{A}$ als erstes steht, jedes andere um eine Stelle später, als in $\mathfrak{A}$.

Def. 64. Man sagt: Aus $\mathfrak{A}$ entsteht $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ geht in $\mathfrak{B}$ über) durch rückschreitend zyklische Umstellung (rückschreitenden Zyklus), $\mathfrak{C}$ durch vorschreitend zyklische Umstellung (vorschreitenden Zyklus).

Lehrs. 138. $\mathfrak{A}$ entsteht aus $\mathfrak{B}$ durch vorschreitenden, aus $\mathfrak{C}$ durch rückschreitenden Zyklus. Bei der Paarreihe fallen vorschreitender und rückschreitender Zyklus mit der Umkehrung zusammen.

Lehrs. 139. Ist $\mathfrak{T}$ Teilreihe einer Reihe $\mathfrak{R}$, so kann man aus den Gliedern von $\mathfrak{R}$ eine Reihe $\mathfrak{R}'$ bilden, in der die Glieder G von $\mathfrak{T}$ in einer gegebenen anderen Reihenfolge, die etwa übrigen an ihren ursprünglichen Stellen stehen. Die Menge der Ordnungszahlen der G ist in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ dieselbe.

Def. 65. Entsteht aus $\mathfrak{T}$ die Teilreihe der G in $\mathfrak{R}'$ durch rückschreitenden (vorschreitenden) Zyklus, so sagt man: $\mathfrak{R}'$ entsteht aus $\mathfrak{R}$ durch rückschreitenden (vorschreitenden) Zyklus der G. Ist $\mathfrak{T}$ überdies ein Abschnitt von $\mathfrak{R}$, der $\beta + 1$ Glieder umfaßt, etwa von p bis q, so sagt man: $\mathfrak{R}'$ entsteht aus $\mathfrak{R}$ durch Vorwärtsschieben von p (Rückwärtsschieben von q) um β Stellen; wegen Lehrs. 87 und 139 auch: $\mathfrak{R}$ entsteht aus $\mathfrak{R}'$ durch Rückwärtsschieben von p (Vorwärtsschieben von q) um β Stellen.

Ist $\mathfrak{T}$ eine Paarreihe, etwa aus a und b, so sagt man: $\mathfrak{R}'$ entsteht aus $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}'$) durch eine Paarvertauschung, nämlich durch die Vertauschung von a und b; und zwar durch eine Nachbarvertauschung, wenn a und b in $\mathfrak{R}$ (mithin auch in $\mathfrak{R}'$) benachbart sind.

Lehrs. 140. Das Vorwärtsschieben (Rückwärtsschieben) eines Gliedes p in $\mathfrak{R}$ um β Stellen kann auf β Nachbarvertauschungen zurückgeführt werden, d. h.: Wenn $\mathfrak{R}'$ aus $\mathfrak{R}$ durch Vorwärtsschieben (Rückwärtsschieben) von p um β Stellen entsteht, so kann man eine mit $\mathfrak{R}$ beginnende und mit $\mathfrak{R}'$ endende Reihe von $\beta + 1$ Reihen bilden, deren jede, von $\mathfrak{R}$ abgesehen, aus der nächstfrüheren durch eine Nachbarvertauschung entsteht, nämlich dadurch, daß man p um eine Stelle vorwärts (rückwärts) schiebt.

Die Vertauschung von a und b in $\mathfrak{R}$ kann, wenn b in $\mathfrak{R}$ das $(\gamma+1)^{\text{te}}$ Glied nach a ist, $\gamma > 0$, darauf zurückgeführt werden, daß man a um $\gamma+1$ (oder γ) Stellen vorwärts, b um γ (oder $\gamma+1$) Stellen rückwärts schiebt, gleichviel in welcher Reihenfolge. Die Paarvertauschung kann mithin auf $(\gamma+1)+\gamma$ Nachbarvertauschungen zurückgeführt werden

Lehrs. 141. Ist $\mathfrak{P}$ eine Permutation der Glieder einer Reihe, so kann man eine mit $\mathfrak{P}$ beginnende Reihe aller Permutationen von $\mathfrak{P}$ bilden, in der benachbarte durch eine Paarvertauschung auseinander entstehen.

Jede Umstellung der Glieder einer Reihe kann mithin auf Paarvertauschungen zurückgeführt werden.

Bew. — Für die Paarreihe ist der Satz richtig. Nehmen wir nun an, daß er für jede Reihe von n Gliedern richtig ist, daß aber $\mathfrak{P}$ aus $n+1$ Gliedern besteht, etwa $\mathfrak{P} = a_1 \cdots a_{n+1}$. Ist $\mathfrak{P}_i$ eine mit a_i beginnende Permutation von $\mathfrak{P}$, so kann man eine mit $\mathfrak{P}_i$ beginnende Reihe $\mathfrak{Q}_i$ aller mit a_i beginnenden Permutationen von $\mathfrak{P}$ bilden, in der benachbarte durch eine Paarvertauschung auseinander entstehen. Als $\mathfrak{P}_1$ wählen wir $\mathfrak{P}$, als $\mathfrak{P}_{\alpha+1}$ immer die Permutation, die aus der in $\mathfrak{Q}_\alpha$ letzten durch Vertauschung von a_α mit $a_{\alpha+1}$ hervorgeht, und brauchen dann nur noch die Reihen $\mathfrak{Q}_1 \ldots \mathfrak{Q}_{n+1}$ zu einer Reihe „zusammenzufügen“ (Lehrs. 32).

Def. 66. Ist $\mathfrak{F}$ eine Folge (von n Gliedern a), und sind die E Elemente von $\mathfrak{F}$, so heißt die aus den E bestehende Folge $\mathfrak{E}$ eine Teilfolge aus $\mathfrak{F}$.

Ist F Gemeinname für die Folgen der a (Def. 61), so werden wir statt: g ist Glied einer Folge F, auch sagen: g ist Glied des Dinges M. Auch ein solches Ding M nennen wir eine Menge und zwar die Menge der „Stücke“ a. Die Häufigkeit des Gliedes g in F nennen wir die Häufigkeit des Dinges g in M. Die Menge im ursprünglichen Sinn (Def. 22) heiße eigentliche Menge.

Gibt es eine Folge $\mathfrak{E}$ der c, die Teilfolge einer Folge F ist, so sagen wir statt dessen auch: die c gehören zu den a, zur Menge M, und nennen, wenn $\mathfrak{E}$ von F verschieden ist, die Menge der c einen Teil der Menge der a.

Gehört zu den E jedes der Elemente von $\mathfrak{F}$ vom ersten E bis zum letzten E, so heißt $\mathfrak{E}$ ein Abschnitt aus $\mathfrak{F}$. Der Abschnitt heiße der Abschnitt von der Stelle p bis zur Stelle q, wenn das erste und das letzte E die Ordnungszahlen p und q in $\mathfrak{F}$ besitzen; der Abschnitt zwischen den Stellen p' und q', wenn $p = p' + 1$, $q' = q + 1$, $1 < p < q < n$; der Abschnitt bis zur Stelle q oder vor der Stelle q', wenn $p = 1$; der Abschnitt von der Stelle p an oder nach der Stelle p', wenn $q = n$.

Anm. — Teilfolgen einer Folge, die keine Reihe ist, verhalten sich nicht ganz wie Teilreihen einer Reihe; sie können z. B. Folgen derselben Dinge, sogar konforme Folgen sein. Uneigentliche Mengen verhalten sich nicht ganz wie eigentliche; z. B. gibt es uneigentliche Mengen, die nur einen Teil haben.

Lehrs. 142. Jede Teilfolge aus einer Folge der a ist Abschnitt einer Folge der a.

Ist $\mathfrak{A}$ ein von $\mathfrak{F}$ verschiedener Abschnitt aus $\mathfrak{F}$, von der Stelle p bis zur Stelle q, nach dessen Ausscheiden eine Teilfolge $\mathfrak{E}$ oder nur ein Glied g zurückbleibt, so kann man $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{F}$ durch ein Glied h ersetzen, d. h. eine Folge $\mathfrak{H}$ derart bilden, daß das p^{te} Element von $\mathfrak{H}$ eine Angabe von h ist, und daß durch Fortlassen dieses Elementes eine mit $\mathfrak{E}$ konforme Folge oder nur eine Angabe von g zurückbleibt. Man kann auch „in $\mathfrak{F}$ ein Glied durch ein Glied, ein Glied durch eine Folge, einen Abschnitt durch eine Folge ersetzen“.

Endlich kann man „in der Menge M ein Stück oder eine Teilmenge durch ein Stück oder eine Menge ersetzen“.

Lehrs. 143 (vgl. Lehrs. 139—141 und Def. 65). Ist die Folge $\mathfrak{E}$ der c, die nicht alle einander gleich sein sollen, Teilfolge von $\mathfrak{F}$, so kann man eine Folge $\mathfrak{F}'$ der a bilden, in der die c in einer gegebenen anderen Reihenfolge, die etwa übrigen a an ihren ursprünglichen Stellen stehen Aus $\mathfrak{F}$ kann eine andere Folge der a „durch rück- oder vorschreitenden Zyklus der c, durch eine Paarvertauschung, durch eine Nachbarvertauschung“ entstehen

Ist $\mathfrak{P}$ eine Permutation der a, so kann man eine mit $\mathfrak{P}$ beginnende und jede Permutation von $\mathfrak{P}$ enthaltende Folge von Permutationen bilden, in der benachbarte durch Paar-

vertauschung auseinander entstehen. Jede Umstellung der a kann mithin auf Paarvertauschungen und schließlich auf Nachbarvertauschungen zurückgeführt werden

§ 19. Ausdehnung der Addition auf beliebige Zahlenfolgen.

Lehrs. 144. In einer Folge $\mathfrak{F}$ von n Zahlen werde die i^{te} mit a_i bezeichnet ($i = 1, 2, .., n$). Weiter bedeute s_1 die Zahl a_1 und s_{k+1} für $0 < k < n$ die Summe $s_k + a_{k+1}$, so daß jedes s_i eine und nur eine Zahl bedeutet. Wird dann s_n mit s bezeichnet, so ist s durch die Folge $a_1 \cdot\cdot\, a_n$ (vgl. Lehrs. 125) bestimmt und ändert sich, wenn man eines der a_i ändert.

Def. 67. Die Zahl s heißt die Summe der Folge $a_1 \cdot\cdot\, a_n$. Man bezeichnet sie mit $a_1 + \cdot\cdot + a_n$ und nennt a_i das i^{te} Glied des Ausdruckes $a_1 + \cdot\cdot + a_n$, auch (vgl. Def. 57) der Summe s.

Lehrs. 145. Jede Folge von Zahlen $a_1 \cdot\cdot\, a_n$ hat eine Summe.

Für $1 < i < n$ ist:

$$s_i = a_1 + \cdot\cdot + a_i, \qquad s_{i+1} = (a_1 + \cdot\cdot + a_i) + a_{i+1},$$

$$s = s_i + a_{i+1} + \cdot\cdot + a_n, \qquad s = a_1 + (a_2 + \cdot\cdot + a_n).$$

Bew. der dritten Formel. — Es ist $s_{i+1} = s_i + a_{i+1}$. Ist aber $s_\nu = s_i + a_{i+1} + \cdot\cdot + a_\nu$, so ist $s_{\nu+1} = s_\nu + a_{\nu-1}$ $= (s_i + a_{i+1} + \cdot\cdot + a_\nu) + a_{\nu+1} = s_i + a_{i+1} + \cdot\cdot + a_{\nu+1}$.

Bew. der vierten Formel. — Es ist

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

mithin $s_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$. Ist aber $s_\nu = a_1 + (a_2 + \cdot\cdot + a_\nu)$, so ist $s_{\nu+1} = \big(a_1 + (a_2 + \cdot\cdot + a_\nu)\big) + a_{\nu+1} = a_1 + \big((a_2 + \cdot\cdot + a_\nu) + a_{\nu+1}\big)$ $= a_1 + (a_2 + \cdot\cdot + a_{\nu+1})$.

Lehrs. 146. Der Ausdruck $a_1 + \cdot\cdot + a_n$ ist assoziativ, d. h.: Ersetzt man (Lehrs. 142) in der Folge $a_1 \cdot\cdot\, a_n$ einen von der Folge verschiedenen Abschnitt durch seine Summe, so wird die Summe der Folge nicht geändert.

Lehrs. 147. Der Ausdruck $a_1 + \cdot\cdot + a_n$ ist kommutativ, d. h.: Die Summe einer Folge bleibt ungeändert, wenn man die Glieder beliebig umstellt.

Bew. braucht nach Lehrs. 143 nur für Nachbarvertauschungen geführt zu werden; für diese folgt er aus Lehrs. 146 und 130 Nr. 3.

Def. 68. Da s hiernach nur von der Menge der a, nicht von ihrer Reihenfolge abhängt, so nennt man s die Summe der a, die a die Glieder (Addenden, Summanden) der Summe.

Für die Summe der Folge $a_1 | \cdots | a_n$ einen anderen Namen — insbesondere den dekadischen — ermitteln, heißt: die a addieren (zusammenzählen).

Lehrs. 148. Man darf in der Summe einen beliebigen Teil der Glieder zusammenfassen, d. h. durch ihre Summe ersetzen (Lehrs. 142).

Umgekehrt darf man jedes Glied der Summe „in Summanden zerlegen".

Lehrs. 149. Sind alle Addenden 0, so ist die Summe 0. In jeder anderen Summe kann man die Glieder, die 0 sind, fortlassen (Def. 59).

Die Summe ist größer als jedes ihrer Glieder und jede ihrer „Teilsummen", wenn nicht alle übrigen Glieder 0 sind.

Die Summe wächst, wenn ein oder mehrere Summanden wachsen. (Wachsen, zunehmen, steigen = durch eine größere Zahl ersetzt werden; abnehmen, fallen = durch eine kleinere Zahl ersetzt werden.)

Wächst die Summe und ändert sich nur ein Addend, so ist dieser gewachsen.

Ist $n > 1$, so ist n die Summe von n Addenden 1. Jede Zahl ist Summe von n Zahlen.

Lehrs. 150. Die Zahl, deren dekadischer Name aus dem der natürlichen Zahl n durch Anhängen einer Null entsteht, werde mit $\bar{n}$ bezeichnet, 0 auch mit $\bar{0}$. Die Zahl, deren dekadischer Name aus dem der mehrstelligen Zahl m durch Fortlassen der letzten Ziffer entsteht, werde mit m_1, die Null für jede einstellige Zahl z mit z_1 bezeichnet, $(a_n)_1$ mit a_{n+1}. Die n^{te} Ziffer vom Ende an im dekadischen Namen von m werde mit $m^{(n)}$ bezeichnet, z mit $z^{(1)}$. Dann gelten folgende Formeln:

$$a = \bar{a}_1 + a^{(1)}, \quad \bar{a} + 10 = a + 1, \quad \bar{a} + \bar{b} + \cdots = a + b + \bar{\cdots}.$$

Bew. der dritten Formel für zwei Addenden. — Man hat: $\bar{a} + \bar{o} = \overline{a + o}$, $\bar{a} + \bar{1} = \overline{a + 1}$. Ist aber $\bar{a} + \bar{n} = \overline{a + n}$, so ist

$$\bar{a} + \overline{n + 1} = \bar{a} + \bar{n} + 10 = \overline{a + n} + 10 = \overline{a + (n + 1)}.$$

Lehrs. 151. Addiert man zu jeder der Zahlen von 1 bis 9 die Zahl selbst und der Reihe nach jede etwa größere einstellige Zahl, so ergeben sich als Summen die Zahlen von 2 bis 10, von 4 bis 11, von 6 bis 12, von 8 bis 13, von 10 bis 14, von 12 bis 15, von 14 bis 16, die Zahlen 16 und 17, die Zahl 18.

Lehrs. 152. Ist a mehrstellig, b einstellig, so wird $a + b$ durch eine oder mehrere Additionen von je zwei einstelligen Zahlen gefunden.

Die Summe aus einer mehrstelligen Zahl und mehreren einstelligen, sowie die Summe von mehr als zwei einstelligen Zahlen wird hierdurch auf Additionen von je zwei einstelligen Zahlen zurückgeführt.

Bew. — Der Satz ist richtig für die Summe $a + 1$. Denn im Fall $a^{(1)} < 9$ ist $(a + 1)^{(1)} = a^{(1)} + 1$ und $(a + 1)_1 = a_1$; im Fall $a^{(1)} = 9$ ist $(a + 1)^{(1)} = 0$ und $(a + 1)_1 = a_1 + 1$. Ist $a^{(1)} = 9$ und a_1 mehrstellig, so hat man dasselbe auf $a_1 + 1$ anzuwenden. Usf.

Weiter ist für $a^{(1)} + b < 10 : (a + b)^{(1)} = a^{(1)} + b$ und $(a + b)_1 = a_1$; für $a^{(1)} + b \geq 10 : (a + b)^{(1)} = (a^{(1)} + b)^{(1)}$ und $(a + b)_1 = a_1 + 1$.

Lehrs. 153. Jede Summe $s = a + b + \cdots$ wird durch eine oder mehrere Additionen von je zwei einstelligen Zahlen, mithin durch eine oder mehrere Anwendungen von Lehrs. 151 gefunden.

Bew. für $s > 19$. — Wird $a^{(1)} + b^{(1)} + \cdots$ mit σ bezeichnet, so ist

$$s = \sigma + \overline{a_1 + b_1 + \cdots} = \sigma^{(1)} + \overline{\sigma_1 + a_1 + b_1 + \cdots},$$

folglich $s^{(1)} = \sigma^{(1)}$ und $s_1 = \sigma_1 + a_1 + b_1 + \cdots$. Hat man aber $s^{(1)}, \cdots, s^{(k)}$, und s_k als eine unter Lehrs. 152 fallende oder als eine andere Summe, so kann man in dem einen Fall s zusammensetzen, in dem andern $s^{(k+1)}$ und Zahlen, deren Summe s_{k+1} ist, angeben.

Anm. — Hierdurch wird die Addition, wenn mehr als ein Addend > 1 ist, im Vergleich zu der aus der ursprünglichen Definition fließenden Anweisung — meist erheblich — abgekürzt. Bei $\sigma > 9$ ist es üblich, s_1 (und entsprechend $s_2, \ldots$) in der Form

$$\sigma_1 + a^{(2)} + b^{(2)} + \cdots + \overline{a_2 + b_2 + \cdots}$$

zu bilden, auch wenn σ_1 mehrstellig ist.

§ 20. Addition benannter Zahlen.

Lehrs. 154. Entsteht aus der Menge*) $\mathfrak{A}$ von a Stücken die Menge $\mathfrak{S}$ durch Hinzufügung der Stücke einer Menge $\mathfrak{B}$ von b Stücken, so besteht die Menge $\mathfrak{S}$ aus $a + b$ Stücken (Lehrs. 80 und 126).

Lehrs. 155. Sind $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ Mengen von $m_1, \ldots, m_n$ Stücken, und haben diese Mengen kein Stück gemein, so gibt es eine und nur eine Menge $\mathfrak{S}$, welche alle Stücke jener Mengen und nur sie enthält; die Anzahl der Stücke von $\mathfrak{S}$ ist $m_1 + \cdots + m_n$**).

Def. 69. Die Menge $\mathfrak{S}$ heißt die Summe der Mengen $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$. Man bezeichnet sie mit $\mathfrak{M}_1 + \cdots + \mathfrak{M}_n$.

Lehrs. 156. Der Ausdruck $\mathfrak{M}_1 + \cdots + \mathfrak{M}_n$ ist kommutativ und assoziativ.

Lehrs. 157. Enthält eine Menge s Dinge D, nämlich a_1 Dinge $D_1, \ldots, a_n$ Dinge D_n, wobei keinem dieser D mehr als einer der Gemeinnamen $D_1, \ldots, D_n$ zukommt, so ist $s = a_1 + \cdots + a_n$.

Bew. zunächst für $n = 2$ mittelst Lehrs. 154, Lehrs. 80 und Def. 59.

Def. 70. Man sagt in diesem Fall: Die Menge enthält $a_1 D_1 + \cdots + a_n D_n$. Man sagt ferner: Die Menge enthält $a_1 D + \cdots + a_n D$.

Def. 71. Enthält eine Menge $\mathfrak{M}$ ein oder mehrere D, so heiße dieses D oder die Menge dieser D der Bestand an

---

*) „Menge“ ist in diesem Paragraphen im eigentlichen Sinn zu verstehen außer in Lehrs. 160.

**) Die Lehrsätze 154 und 155 lassen sich so fassen, daß $a, b, m_1, \ldots, m_n$ auch 1 sein können.

Dingen D in $\mathfrak{M}$. Für alle Mengen, die mD enthalten ($m > 0$), dient mD als Gemeinname des Bestandes an D oder, wenn es nur mD gibt, als Eigenname.

Enthält eine Menge kein D, so sagen wir: ihr Bestand an D ist $0D$.

Die Ausdrücke mD, $0D$ heißen benannte Zahlen, D die Benennung. Die Zahlen heißen deshalb auch unbenannte Zahlen.

Neben dieser Anwendung von „mD“ und „$0D$“ bleibt die bisherige (Def. 27, 28, 47) fortbestehen.

Def. 72. Im Fall des Lehrs. 157 wird der Bestand an D außer mit sD auch mit $a_1 D_1 + \cdot\cdot + a_n D_n$ und $a_1 D + \cdot\cdot + a_n D$ bezeichnet. Man nennt sD die Summe aus $a_1 D, \ldots, a_n D$.

Auch die Ausdrücke $a_1 D_1 + \cdot\cdot + a_n D_n$, $a_1 D + \cdot\cdot + a_n D$ sind als benannte Zahlen anzusehen.

Lehrs. 158. Die Ausdrücke $a_1 D_1 + \cdot\cdot + a_n D_n$, $a_1 D + \cdot\cdot + a_n D$ sind kommutativ und assoziativ.

Der Ausdruck $a_1 D + \cdot\cdot + a_n D$ ist gleichbedeutend mit sD und mit $b_1 D + \cdot\cdot + b_\nu D$, wenn $b_1 + \cdot\cdot + b_\nu = s$. Ist s weder 0 noch Anzahl aller D, so ist sD ein Gemeinname, unter den $a_1 D_1 + \cdot\cdot + a_n D_n$ fällt.

Def. 73. Man nennt $sD, s'D, a_1 D + \cdot\cdot + a_n D, b_1 D + \cdot\cdot + b_\nu D$, wenn $s = s' = a_1 + \cdot\cdot + a_n = b_1 + \cdot\cdot + b_\nu$, einander gleich und drückt dies durch das Gleichheitszeichen aus, obwohl dann die beiden Seiten nicht bei jeder Anwendung dasselbe Ding bedeuten (vgl. Def. 54).

Lehrs. 159. Aus $aD = bD$ folgt: $a = b$. Aus $sD = a_1 D + \cdot\cdot + a_n D$ folgt: $s = a_1 + \cdot\cdot + a_n$.

Lehrs. 160 (vgl. Lehrs. 133). Enthält eine Menge von n Stücken ein Ding in der Häufigkeit α und kein anderes Ding, so ist $\alpha = n$. Enthält sie Dinge $A, B, \ldots$ in den Häufigkeiten $\alpha, \beta, \ldots$, so ist $\alpha + \beta + \cdot\cdot = n$. (Lehrs. 157.)

Anhang zu § 20. Rechnen.

Die Addition wird eine Rechnungsart genannt. Rechnen heißt: arithmetische Begriffe verknüpfen und zwar nicht bloß zu Erklärungen. Der Sprachgebrauch setzt voraus, daß dabei Zahlen vorkommen. Eine Rechnung, bei der Buchstaben oder

andere Zeichen für Zahlen in einer vorübergehenden Bedeutung vorkommen, heißt Buchstabenrechnung. Verknüpfung arithmetischer Begriffe mit andern ist angewandtes Rechnen.

Die Rechnung ist, wenn man sie der abgekürzten Form entkleidet, eine Aussage, und zwar ein abgeleiteter Satz, oder eine Folge von Aussagen, die mindestens einen abgeleiteten Satz enthält, wobei das über den mathematischen Beweis Gesagte erfüllt sein muß. Der letzte oder einzige abgeleitete Satz heißt das Ergebnis der Rechnung. Handelt es sich um die Ermittelung eines Dinges, das einer gewissen Forderung genügt, insbesondere einer Zahl oder eines Ausdrucks dafür, so heißt auch dieses Ding das Ergebnis der Rechnung. Von dem Ergebnis der Rechnung sagt man, daß es durch sie „berechnet“ wird.

Beispiele. — Zu einer Zahl die nächstfolgende, die nächstfrühere bilden; Anwendung: die Stücke einer Menge zählen*), Glieder einer Reihe abzählen (siehe Def. 44), addieren (hinzurechnen, zusammenrechnen) gemäß der ursprünglichen Definition. — Durch Zuordnen oder Zählen entscheiden, ob zwei Mengen ebenbürtig sind, oder welche die schwächere ist; das Entsprechende für mehr als zwei Mengen. — Bei zwei Folgen entscheiden, ob sie gleichviel Elemente enthalten, ob sie konform sind, welche weniger Elemente enthält. — Anwendung auf die Stellenzahl dekadischer Zahlen: Wieviel Stellen hat eine vorgelegte Zahl? Sind zwei vorgelegte Zahlen gleichstellig? Welche hat weniger Stellen? Fall der Gleichheit. — Die kleinere von zwei dekadischen Zahlen ermitteln; mehr als zwei Zahlen nach der Größe ordnen.

§ 21. Subtraktion.

Lehrs. 161. Ist die Zahl b nicht größer als die Zahl a, so kann man eine und nur eine Zahl r derart angeben, daß $b + r = a$ wird. Dabei ist $r < a$, außer wenn $b = 0$.

*) Das Wort Zählen tritt hier nicht mehr in dem Sinn der Def. 43 auf, sondern bedeutet: durch Zählen in jenem Sinn die Anzahl der Stücke ermitteln. Das Entsprechende gilt vom Abzählen.

Bew. — Im Fall $a = b$ ist $r = 0$. Im Fall $a = b + 1$ ist $r = 1$. Im Fall $a > b + 1$ ist r die Anzahl der Zahlen von $b + 1$ bis a (Lehrs. 131).

Def. 74. Die Zahl r heißt die Differenz der Folge $a\,b$; auch: die Differenz (der Unterschied) der Zahlen a und b (oder b und a), zwischen den Zahlen (a und b oder) b und a; ferner: der Überschuß von a über b, der Rest von a weniger b.

Die Differenz der Folge $a\,b$ berechnen, heißt, auch wenn $b = 0$: a um b verkleinern (vermindern), b von a abziehen oder subtrahieren (wegnehmen, abrechnen).

Man bezeichnet r auch mit: b von a, a davon b, a vermindert um b, a weniger b, a minus b, $a - b$. Man nennt a den Minuendus oder das erste Glied, b den Subtrahendus oder das zweite Glied des Ausdrucks $a - b$.

Ist das erste Glied einer Summe oder Differenz selbst eine Summe oder Differenz, so darf man die Klammer um das erste Glied fortlassen (vgl. Def. 67):

$$(\alpha \pm \beta) \pm \gamma = \alpha \pm \beta \pm \gamma.$$

Lehrs. 162. Von jeder Zahl kann man sie selbst und jede kleinere abziehen, aber keine größere. Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich auf, d. h. es ist

$$a - b + b = a \text{ für } a > b, \quad \alpha + \beta - \beta = \alpha;$$

worin enthalten ist, daß

$$a - a = 0 + a - a = 0, \quad a - 0 = a - 0 + 0 = a.$$

Man nennt deshalb Addition und Subtraktion einander entgegengesetzte Rechnungsarten, die Subtraktion die Umkehrung der Addition. Addition und Subtraktion heißen die Rechnungen erster Stufe, plus und minus die Rechnungszeichen erster Stufe.

Lehrs. 163. Die Differenz wächst, wenn der Minuend wächst oder der Subtrahend abnimmt; sie ist null nur bei Gleichheit der Glieder.

Bew. — Wenn $a > a' > b$, so ist $a - b + b > a' - b + b$, folglich $a - b > a' - b$. Wenn $a > b > b'$, so ist $a - b' + b' = a - b + b > a - b + b'$, folglich $a - b' > a - b$.

Lehrs. 164. Für $\alpha > \beta$ ist $\alpha - (\beta + 1)$ die nächste Zahl vor $\alpha - \beta$. Hierdurch wird $a - b$ für $a > b$ definiert, wenn noch

hinzutritt: $a - 0 = a$; und zwar wird $a - b$ für $a \geq b > 0$ die b^{te} Zahl vor a, die $(b+1)^{\text{te}}$ von a an rückwärts.

Für $a \geq b > 0$ kann mithin $a - b$ durch Rückwärtszählen gefunden werden (daher „abzählen" für „subtrahieren"). Für $a > b$ wird aber (Bew. zu Lehrs. 161) $a - b$ auch durch Vorwärtszählen von $b + 1$ bis a gefunden, z. B. $a - 1$ für $a > 1$ durch Zählen von 2 bis a.

Überhaupt können die bisherigen Rechnungen (vgl. Anhang zu § 20) auf „Schritte vorwärts" in der Zahlenreihe zurückgeführt werden.

Lehrs. 165. Wenn $a \geq b_1 + b_2$ (d. i. $a \geq b_1$, $a - b_1 \geq b_2$), so ist

$$a - b_1 - b_2 = a - (b_1 + b_2),$$

weil $a - b_1 - b_2 + (b_1 + b_2) = a - b_1 - b_2 + b_2 + b_1 = a - b_1 + b_1 = a$.

Wenn $n > 1$ und $a > b_1 + \cdot \cdot + b_n$ (d. i. $a \geq b_1$, $a - b_1 \geq b_2$, $\cdot \cdot$), so ist

$$a - b_1 - \cdot \cdot \cdot - b_n = a - (b_1 + \cdot \cdot + b_n).$$

Die Subtraktionen können daher beliebig umgestellt werden.

Anm. — Dem Ausdruck $a - (b_1 + \cdot \cdot + b_n)$ zieht man, wo nicht besondere Zwecke verfolgt werden, den Ausdruck $a - b_1 - \cdot \cdot \cdot - b_n$ vor, der von Klammern frei ist, wenn nicht an Stelle der Zahlen Ausdrücke stehen.

Überhaupt werden für gewisse Gattungen von Ausdrücken bestimmte Formen bevorzugt. Einen Ausdruck ausrechnen, heißt dann: ihn auf solche Form bringen. Im engsten Sinn gilt dies für die Bestimmung des festen (hier des dekadischen) Namens einer mittelst eines Ausdrucks angegebenen Zahl.

Lehrs. 166. Für $a > b$ ist $a - b + c = a + c - b$, d. h.: Die Addition kann immer der Subtraktion vorangestellt werden. Zugleich ist

$$c + a - b = c + (a - b).$$

Weiter ist

$$a - (b - c) = a + c - b \text{ für } a + c \geq b \geq c,$$
$$a - (b - c) = a - b + c \text{ für } a \geq b \geq c.$$

Endlich ist

$$a - b = (a + \alpha) - (b + \alpha) \text{ für } a \geq b,$$
$$a - b = (a - \alpha) - (b - \alpha) \text{ für } a \geq b \geq \alpha,$$
$$a + b = (a + \alpha) + (b - \alpha) \text{ für } b > \alpha,$$
$$a + b = (a + \alpha) - (\alpha - b) \text{ für } \alpha > b.$$

Lehrs. 167. Subtrahiert man irgend eine der Zahlen von 0 bis 9 von ihr selbst und von den neun auf sie folgenden Zahlen, so bleiben als Reste der Reihe nach die Zahlen von 0 bis 9. Durch eine oder mehrere dieser Subtraktionen wird bei Anwendung der dekadischen Namen jede andere Differenz $a - b = r$ ungleicher Zahlen (wo also $a > b + 9$, wenn $b < 10$) gefunden.

Bew. — Wenn wir die Bezeichnungen aus Lehrs. 150 entlehnen, so ist (Lehrs. 117):

$$\bar{m} > \bar{n} \text{ und } m_1 > n_1 \text{ für } m > n,$$

$$\bar{m} - \bar{n} = \overline{m - n} \text{ für } m > n,$$

$$m^{(1)} > n^{(1)}, \text{ wenn } m > n \text{ und } m_1 = n_1.$$

$$a = \bar{a}_1 + a^{(1)}, \quad a_1 > 0, \text{ für } a^{(1)} < b < 10 \text{ sogar } a_1 > 1$$

Ist nun b einstellig und $\leq a^{(1)}$, so hat man:

$$r = \bar{a}_1 + (a^{(1)} - b), \quad r^{(1)} = a^{(1)} - b, \quad r_1 = a_1.$$

Sodann ist für jede mit 0 endigende Zahl $c > 10$:

$$c_1 > 1, \ c - 1 = \overline{c_1 - 1} + 10 - 1, \ \ (c - 1)^{(1)} = 9, \ \ (c - 1)_1 = c_1 - 1,$$

und dies setzt sich fort, wenn auch $c_1 > 10$ ist und mit 0 endigt.

Ist b wieder einstellig, aber $> a^{(1)}$, also $a_1 > 1$, so hat man:

$$10 + a^{(1)} < 10 + b, \text{ d. i. } < b + 9; \quad r = \overline{a_1 - 1} + 10 + a^{(1)} - b,$$

$$r^{(1)} = 10 + a^{(1)} - b, \quad r_1 = a_1 - 1.$$

Es bleibt noch der Fall $a > b > 9$. In diesem ist entweder

$$a^{(1)} > b^{(1)}, \quad a_1 = b_1; \quad r = a^{(1)} - b^{(1)};$$

oder

$$a^{(1)} \geq b^{(1)}, \ a_1 > b_1; \ r = a_1 - b_1 + a^{(1)} - b^{(1)}, \ r^{(1)} = a^{(1)} - b^{(1)}, \ r_1 = a_1 - b_1;$$

oder

$$a^{(1)} < b^{(1)}, \quad a_1 = b_1 + 1: \quad r = 10 + a^{(1)} - b^{(1)};$$

oder

$$a^{(1)} < b^{(1)}, \quad a_1 > b_1 + 1; \quad r = \overline{a_1 - 1} - b_1 + 10 + a^{(1)} - b^{(1)},$$

$$r^{(1)} = 10 + a^{(1)} - b^{(1)}, \quad r_1 = a_1 - 1 - b_1$$

Anm. — Hierdurch wird die Subtraktion, wenn $1 \leq b \leq a - 1$, im Vergleich zu der aus Def. 74 oder Lehrs. 164 fließenden Anweisung abgekürzt.

Def. 75. Ist $\mathfrak{M}$ eine eigentliche Menge von m Stücken, $\mathfrak{N}$ eine Teilmenge von n Stücken oder nur ein Stück von $\mathfrak{M}$ (in diesem Fall werde 1 mit n bezeichnet), $\mathfrak{P}$ die Menge der etwa p Stücke von $\mathfrak{M}$, die in $\mathfrak{N}$ fehlen oder von $\mathfrak{N}$ verschieden sind, oder das einzige solche Stück (in diesem Fall werde 1 mit p bezeichnet), so heißt $\mathfrak{P}$ der Rest von $\mathfrak{M}$ weniger $\mathfrak{N}$ und wird mit $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ bezeichnet.

Lehrs. 168. Hierbei ist $p = m - n$.

Def. 76. Wenn eine eigentliche Menge, die aus der eigentlichen Menge $\mathfrak{Q}$ durch Hinzufügen von b Dingen D entsteht, (oder die Menge $\mathfrak{Q}$ selbst; in diesem Fall sagt man, zu $\mathfrak{Q}$ seien $0D$ hinzugefügt worden; wir bezeichnen dann 0 mit b) aD enthält, so sagt man: $\mathfrak{Q}$ enthält $aD - bD$.

Für alle Mengen, die $aD - bD$ enthalten, wird der Bestand an D auch mit $aD - bD$ bezeichnet. Man nennt ihn die Differenz von aD und bD.

Lehrs. 169. Die Menge $\mathfrak{Q}$ enthält $(a - b)D$. Es ist daher $aD - bD = (a - b)D$, analog zu Def. 73.

Def. 77. Es sei $a_1 | .. a_n$ eine Folge von Zahlen, deren erste wir auch mit s_1 bezeichnen; ε_{k+1} sei für $0 < k < n$ ein solches Rechnungszeichen erster Stufe, daß $s_k \varepsilon_{k+1} a_{k+1} = s_{k+1}$ möglich wird; s_n werde mit s bezeichnet. Dann heißt s ein Aggregat aus den a und zwar ein Aggregat aus der Folge $a_1 .. a_n$, $a_i \, (i = 1, \cdot \cdot, n)$ das i^{te} Glied des Aggregats. Ist $i = 1$ oder ε_i ein Pluszeichen, so heißt a_i ein additives, sonst ein subtraktives Glied.

Wir nennen s auch das Aggregat der Folge $a_1 | \varepsilon_2 a_2 | .. | \varepsilon_n a_n$, wo $\varepsilon_i a_i$ eine Paarfolge vorstellt. Unter Einführung eines Pluszeichens ε_1 nennen wir s ein Aggregat aus der Menge $\varepsilon_1 a_1, .., \varepsilon_n a_n$ und zwar das Aggregat der Folge $\varepsilon_1 a_1 | .. \varepsilon_n a_n$, $\varepsilon_i a_i$ ein additives oder subtraktives Glied.

Lehrs. 170. Enthält die Folge $\varepsilon_1 a_1 | .. \varepsilon_n a_n$ ein subtraktives Glied außerhalb der letzten Stelle $(n > 2)$, so kann man das Glied, ohne die Zahl s zu ändern, mit dem nächstfolgenden vertauschen, überhaupt unmittelbar hinter jedes folgende stellen, zum letzten machen. Jedes additive Glied außerhalb der ersten Stelle kann man mit dem nächstfrüheren Glied vertauschen, unmittelbar vor jedes frühere stellen, zum ersten machen.

Man kann (Bew. von k auf $k+1$) so permutieren, daß kein additives Glied einem subtraktiven nachfolgt. Dabei kann man die Reihenfolge der additiven und der subtraktiven Glieder beibehalten.

Kann man aus der Menge $\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n$ mehrere Aggregate bilden, so sind sie einander gleich.

§ 22. Multiplikation.

Def. 78. Unter m mal a versteht man für $m > 1$ die Summe aus m Gliedern a, für $m = 1$ die Zahl a, für $m = 0$ die 0. Man bezeichnet m mal a mit $m \times a$, $m \cdot a$, ma, mit ma jedoch nie, wenn die Namen m und a dekadische Zahlennamen sind.

Man nennt ma das Produkt der Folge $m\ a$, auch: das $m$fache von a, für $m = 2$: das Doppelte von a. Das Produkt der Folge $m\ a$ berechnen, heißt: a mit m multiplizieren (vervielfältigen), $m$mal nehmen, auch: verdoppeln bei $m = 2$, verdreifachen bei $m = 3$, usw.

Man nennt m den ersten Faktor (Multiplikator), a den zweiten Faktor (Multiplikandus) des Ausdrucks ma.

Ist ma Glied eines Aggregats, so wird es nicht eingeklammert.

Lehrs. 171. Es ist

$$0 \cdot a = 0, \quad (k+1)a = ka + a.$$

Dieser Satz vertritt die Definition von ma.

Lehrs. 172. Der Ausdruck ma ist kommutativ, d. h.: es ist

$$ma = am.$$

Bew. — Zunächst ist $a(k+1) = ak + a$: denn dies ist richtig für $a = 0$, und, wenn $a(l+1) = al + a$, so ist $(a+1)(l+1) = a(l+1) + (l+1) = al + a + l + 1 = (a+1)l + (a+1)$.

Nun ist $a \cdot 0 = 0$, folglich $0 \cdot a = a \cdot 0$. Ist aber $ka = ak$, so ist $(k+1)a = ka + a = ak + a = a(k+1)$.

Def. 79. Da hiernach das Produkt der Folge $a\ b$ sich mit dem der Folge $b\ a$ deckt, so nennt man ab das Produkt aus a und b.

Lehrs. 173. Der Ausdruck ab ist distributiv, d. h.: es ist

$$(m+n)\,b = mb + nb,$$

und folglich

$$a\,(p+q) = ap + aq.$$

Bew. — Es ist $(m+0)b = mb + 0b$. Ist aber $(m+\nu)b = mb + \nu b$, so ist $\big(m + (\nu+1)\big)b = (m+\nu)\,b + b = mb + \nu b + b = mb + (\nu+1)b$.

Def. 80. Es sei $a_1 \ldots a_n$ eine Folge von Zahl'en, deren erste wir auch mit p_1 bezeichnen. Für $0 < k < n$ werde $p_k \cdot a_{k+1}$ mit p_{k+1} bezeichnet, p_n mit p. Dann heißt p das Produkt der Folge $a_1 \ldots a_n$; man bezeichnet es mit $a_1 \ldots a_n$ und nennt a_i den i^{ten} Faktor des Ausdrucks $a_1 \ldots a_n$. Die Faktoren werden auch durch Multiplikationszeichen getrennt. Wegen des Falles dekadischer Zahlennamen vgl. Def. 78.

Lehrs. 174. Der Ausdruck $a_1 \ldots a_n$ ist assoziativ, d. h.: Ersetzt man in der Folge $a_1 \ldots a_n$ einen von der Folge verschiedenen Abschnitt durch sein Produkt, so wird das Produkt der Folge nicht geändert.

Bew. — Zunächst ist $abc = a\,(bc)$; denn es ist $ab \cdot 0 = a\,(b \cdot 0)$; ist aber $ab\gamma = a\,(b\gamma)$, so folgt: $ab\,(\gamma+1) = ab\gamma + ab = a\,(b\gamma) + ab = a\,(b\gamma + b) = a\big(b\,(\gamma+1)\big)$. — Das weitere wie in Bew. zu Lehrs. 145.

Lehrs. 175. Der Ausdruck $a_1 \ldots a_n$ ist kommutativ, d. h.: Das Produkt einer Folge bleibt ungeändert, wenn man die Glieder beliebig umstellt.

Def. 81. Man nennt p das Produkt der a. Das Produkt der a berechnen, heißt: die a multiplizieren.

Lehrs. 176. Man darf in dem Produkt einen beliebigen Teil der Faktoren zusammenfassen, d. h. durch ihr Produkt ersetzen. Umgekehrt darf man jeden Faktor des Produkts „in Faktoren zerlegen."

Sind alle Faktoren 1, so ist das Produkt 1. In jedem anderen Produkt kann man die Faktoren, die 1 sind, fortlassen.

Ist ein Faktor 0, so ist das Produkt 0. Das Produkt aus natürlichen Zahlen ist eine natürliche Zahl.

Lehrs. 177. Das Produkt wächst, wenn ein oder mehrere Faktoren wachsen, falls nicht ein anderer Faktor 0 ist.

Wächst das Produkt, so ist mindestens einer der Faktoren gewachsen.

Bew. — Es sei $a > a'$. Dann ist $a \cdot 1 > a' \cdot 1$; ist aber $a\beta > a'\beta$, so ist $a(\beta + 1) = a\beta + a > a'\beta + a' = a'(\beta + 1)$, folglich $ab > a'b$ für $b > 0$. Usw.

Lehrs. 178. Ist das Aggregat $a_1 \pm a_2 \pm \cdot\cdot$ möglich, so ist

$$(a_1 \pm a_2 \pm \cdot\cdot)\, b = a_1 b \pm a_2 b \pm \cdot\cdot.$$

Lehrs. 179. Ist $m\nu > n\mu > 0$, und wählt man k so, daß $km > \mu$ und $kn > \nu$, sodann

$$\mu' = km - \mu, \quad \nu' = kn - \nu,$$

so wird

$$n\mu' > m\nu' > 0, \quad m\nu - n\mu = n\mu' - m\nu'.$$

Bew. — Da $m\nu > n\mu$, so wird $kmn - n\mu > kmn - m\nu$ $n\mu' > m\nu'$. Da $\mu + \mu' = km$, $\nu + \nu' = kn$, so wird $m\nu + m\nu' = n\mu + n\mu'$.

Lehrs. 180. Wenn wir die Bezeichnungen aus Lehrs. 150 entlehnen, so ist $\bar{a} = 10a$ (Bew. von a auf $a + 1$), $a = 10a_1 + a^{(1)}$.

Endet b mit 0, so ist $ab = \overline{ab_1}$. Alle Multiplikationen können also auf den Fall zurückgeführt werden, wo kein Faktor mit 0 endigt.

Lehrs. 181. Es ist $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 1 = 2$, $\cdot\cdot$, $9 \cdot 9 = 81$. Durch eine oder mehrere dieser Multiplikationen wird bei Anwendung der dekadischen Namen jedes andere Produkt natürlicher Zahlen gefunden.

Bew. — Ist $p = ab$, so ist für $0 < b < 10$:

$$p = 10a_1 b + a^{(1)} b, \quad a^{(1)} b < 81,$$

$$p^{(1)} = (a^{(1)} b)^{(1)}, \quad p_1 = a_1 b + \sigma_{(1)}, \text{ wo } \sigma_{(1)} = (a^{(1)} b)_1 < 9.$$

Hat man aber $p^{(1)}, \ldots, p^{(k)}$ und für p_k einen Ausdruck $a_k b + \sigma_{(k)}$ mit $\sigma_{(k)} < 9$, und ist a_k noch mehrstellig, so wird

$$p^{(k+1)} = (a^{(k+1)} b + \sigma_{(k)})^{(1)}, \quad p_{k+1} = a_{k+1} b + \sigma_{(k+1)},$$

wo

$$\sigma_{(k+1)} = (a^{(k+1)} b + \sigma_{(k)})_1 < 9.$$

Für $b > 9$, $b^{(1)} > 0$ rechnet man:

$$p = ab^{(1)} + ab_1 \cdot 10. \quad \text{Usw.}$$

Anm. — Hierdurch wird die Multiplikation natürlicher Zahlen, wenn kein Faktor 1 ist, abgekürzt. Abweichend von der Addition wird jedoch die Multiplikation von $n + 1$ Faktoren in n Multiplikationen von je 2 Faktoren aufgelöst.

Die schriftliche Multiplikation wird so angeordnet, daß bei der Multiplikation von a mit $b_1 \cdot 10$ (und entsprechend bei späteren ähnlichen Gelegenheiten) die Nullen, die aus den letzten Stellen von $b_1 \cdot 10$ herrühren, weggelassen werden können.

Def. 82. Unter dem Produkt aus der unbenannten Zahl m und der benannten Zahl aD versteht man die Summe aus m Gliedern aD für $m > 1$, aD für $m = 1$, $0D$ für $m = 0$.

Man bezeichnet dieses Produkt mit m mal (aD), $m \times (aD)$, $m \cdot (aD)$.

Lehrs. 182. Es ist $m \cdot (aD) = (ma)D$.

§ 23. Division.

Lehrs. 183. Ist $b > 0$, so gibt es für jede Zahl a eine und nur eine Zahl q derart, daß

$$bq \leqq a < b(q + 1) \text{ oder } a = bq + r, \text{ wo } r < b.$$

Bew. — Da $bm > a$ für $m > a$, so gibt es unter den Zahlen n, die $bn < a$ machen, eine größte. Bezeichnet man diese mit q und $a - bq$ mit r, so wird $b(q + 1) > a$, $bq + r = a < bq + b$, $r < b$.

Nimmt man $q' > q$, so wird $bq' > a$. Nimmt man $q' < q$, so wird $b(q' + 1) < a$.

Def. 83. Die Zahl q heißt der Quotient, r der Divisionsrest der Folge $a\ b$. Quotient und Rest der Folge $a\ b$ berechnen, heißt: a durch b dividieren (teilen), auch: mit b in a dividieren.

Wir bezeichnen q mit: a durch b, $a : b$, und nennen a den Dividendus, b den Divisor des Ausdrucks $a : b$. Ein Produkt als Dividend wird nicht eingeklammert. Ein Produkt, dessen Faktoren durch kein Multiplikationszeichen getrennt sind, braucht als Divisor nicht eingeklammert zu werden.

Ist $r = 0$, so sagt man: die Division von a durch b geht auf, b geht auf in a, b geht q mal auf in a.

Lehrs. 184. Der Quotient ist höchstens gleich dem Dividendus. Er wird nur dann 0, wenn der Divisor den Dividendus übertrifft.

Die Divisionen in 0, die mit 1, die von b durch b gehen auf. Die Quotienten sind 0, a, 1.

Lehrs. 185. Ist a einstellig, oder die durch Fortlassen der letzten Ziffer aus dem dekadischen Namen von a entstehende Zahl $< b$, so ist q einstellig. Man findet q durch Versuche und berechnet dann $r = a - bq$.

Auf eine oder mehrere Divisionen dieser Art wird bei Anwendung der dekadischen Namen jede andere Division zurückgeführt.

Bew. des zweiten Teils. — Wenn wir die Bezeichnungen aus Lehrs. 150 entlehnen, so ist $a = \bar{a}_1 + a^{(1)}$. Werden nun Quotient und Rest der Division von a_1 durch b mit $\varkappa$ und ϱ, ferner $\varrho + a^{(1)}$ mit σ, endlich Quotient und Rest der Division von σ durch b mit ζ und τ bezeichnet, so ist:

$$a_1 = b\varkappa + \varrho, \quad \sigma = b\zeta + \tau,$$
$$\sigma = 10\varrho + a^{(1)} < 10(\varrho + 1) \leqq 10b, \quad \zeta < 10, \quad \tau < b,$$
$$a = 10b\varkappa + 10\varrho + a^{(1)} = 10b\varkappa + \sigma = b(10\varkappa + \zeta) + \tau.$$

Mithin ist $q = \bar{\varkappa} + \zeta$, $r = \tau$, d. h.: Die Division von a durch $b\,(a > 10b)$ ist auf die von a_1 durch b, die $\varkappa$, ϱ und σ liefert, und die von σ durch b, die ζ und τ liefert, zurückgeführt.

Ist $a_1 > 10b$, so ist die obige Betrachtung nochmals anzuwenden, indem man darin a durch a_1 ersetzt, usw.

Anm. — Besteht b aus einer Eins, auf die nur Nullen folgen, und endet a mit mindestens ebensovielen Nullen, so geht die Division auf, und man erhält den Quotienten, indem man am Ende von a so viele Nullen streicht, wie b enthält.

Def. 84. Ist D eine Benennung, so nennt man qD den Quotienten, rD den Divisionsrest der Folge $aD\ b$. Quotient und Rest der Folge $aD\ b$ berechnen, heißt: aD durch b teilen (aD in b gleiche Teile teilen, falls $r = 0$).

Man nennt q den Quotienten, rD den Divisionsrest der Folge $aD\ bD$. Quotient und Rest der Folge $aD\ bD$ berechnen, heißt: aD mit bD messen.

§ 24. Potenzierung.

Def. 85. Unter einer Potenz der Zahl a versteht man zunächst ein Produkt, dessen Faktoren gleich a sind, unter der n^{ten} Potenz von a für $n > 1$ das Produkt aus n Faktoren a. Weiter nennt man a selbst eine Potenz von a, und zwar die erste. Ist a nicht 0, so wird auch 1 als eine Potenz von a, und zwar als die nullte, bezeichnet. Man schreibt: a^n, a^1, a^0, und liest: a hoch n, a hoch 1, a hoch 0. Die zweite Potenz heißt das Quadrat, die dritte der Kubus, die vierte das Biquadrat.

Man nennt a die Grundzahl (Basis), m den Exponenten des Ausdrucks a^m. Die m^{te} Potenz von a berechnen, heißt: a mit m potenzieren, a zur m^{ten} Potenz erheben.

Ist der Exponent ein Ausdruck, so wird dieser nicht eingeklammert. Eine Potenz braucht nicht eingeklammert zu werden: als Glied eines Aggregats, als Faktor eines Produkts, als Dividendus und als Divisor. Doch darf man nicht ma^n statt $m \cdot a^n$ schreiben, wenn m und a dekadische Zahlennamen sind.

Lehrs. 186. Es ist $(ab)^m = a^m b^m$, wo m im Fall $ab = 0$ nicht 0 sein darf. Weiter ist:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

wo m und n im Fall $a = 0$ nicht 0 sein dürfen.

Ist $a > 0$ und $m \geq n$, so geht die Division von a^m durch a^n auf und liefert als Quotienten a^{m-n}.

Lehrs. 187. Die Potenzen von 0 sind 0, die von 1 sind 1.

Für $a > 1$ ist $a^n > n$ (Lehrs. 132).

Für $a > 1$, $n > 1$ ist $a^n > a$. Für $a < b$, $n > 0$ ist $a^n < b^n$. Für $n > 0$ und beliebiges g gibt es (Lehrs. 132) eine und nur eine Zahl a derart, daß $a^n \leq g < (a+1)^n$ und mithin $b^n > g$ für alle $b > a$.

Für $a > 1$, $p < q$ ist $a^p < a^q$. Für $a > 1$, $g > 0$ gibt es (Lehrs. 132) eine und nur eine Zahl p derart, daß $a^p \leq g < a^{p+1}$ und mithin $a^q > g$ für alle $q > p$.

Lehrs. 188. Wenn $a_1, \cdot\cdot, a_n < 10$, $a_1 > 0$, so ist

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdot \cdot + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$$

die aus den Ziffern $a_1 | \ldots a_n$ bestehende Zahl a.

Def. 86. Das k^{te} Glied dieser Summe heißt der Stellenwert der k^{ten} Ziffer in a. Die Potenzen der 10 von der ersten an heißen die Stufenzahlen (höheren Einheiten) des dekadischen Systems; 10 selbst heißt die Grundzahl (Basis) des Systems.

Besondere Namen bestehen für gewisse Potenzen der 10, für Zahlen zwischen 10 und 20, für die mit 0 endigenden zweistelligen Zahlen, zum Teil auch für einige andere Zahlen. Mittelst dieser besonderen Namen kommt die übliche Lesung der innerhalb eines gewissen Gebietes gelegenen Zahlen zustande.

§ 25. Teilbarkeit.

Def. 87. Ist $a = bc$, so heißt a ein Vielfaches (Multiplum) von b, b ein Faktor, Teiler, Divisor von a. Ist $b > 0$, also $a : b = c$ ohne Rest, so sagt man: a ist durch b teilbar, b ist $c$mal in a enthalten.

Lehrs. 189. Jede natürliche Zahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar, 0 durch jede natürliche Zahl, 1 nur durch 1. Null ist Faktor nur von sich selbst.

Eine Zahl ist gerade oder ungerade, je nachdem sie den Teiler 2 hat oder nicht.

Ein Teiler der Glieder eines Aggregats ist Teiler des Aggregats. Ein Teiler eines Teilers einer Zahl ist Teiler dieser Zahl.

Ist $a > 0$, g beliebig, so gibt es eine und nur eine Zahl b derart, daß $ab < g < a(b+1)$ und mithin jedes Vielfache von a vom $(b+1)$fachen an $> g$ ist.

Lehrs. 190. Ist $a > 1$, so gibt es (Lehrs. 187) eine und nur eine Zahl w derart, daß $w^2 < a < (w+1)^2$. Wächst a, so nimmt w nicht ab. Ist a weder 2 noch 4, so ist $2w < a$.

Die Teiler von a sind $< a$. Man erhält sie, indem man a durch die Zahlen von 1 bis w dividiert und für jeden dabei erkannten Teiler auch den Quotienten festhält. Denn ist $a = bc$ und $c > w$, so ist $b < w$.

Def. 88. Eine natürliche Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt eine Primzahl, jede andere Zahl eine zusammengesetzte.

Lehrs. 191. Primzahlen sind 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 usw. Die einzige gerade Primzahl ist 2. Jede

zusammengesetzte natürliche Zahl a_0 ist ein Produkt aus Primzahlen.

Bew. der letzten Behauptung. — Der kleinste Teiler von a_0 (vom Teiler 1 ist hier abzusehen) ist eine Primzahl $b_1 < a_0$ und liefert einen Quotienten $a_0 : b_1 = a_1$ zwischen 1 und a_0. Ist nun $a_i > 1$ für irgend ein i definiert, so soll a_i, wenn es Primzahl ist, auch b_{i+1} heißen, andernfalls aber als Produkt $b_{i+1} a_{i+1}$ so geschrieben werden, daß b_{i+1} der kleinste Teiler von a_i ist und mithin $1 < a_{i+1} < a_i$. Da hierbei (Lehrs. 132) $i < a_0$ bleibt, so gibt es unter den i, zu denen ein a_i gehört, ein größtes, etwa $m-1$; a_{m-1} ist eine Primzahl b_m und a_0 das Produkt der Primzahlen $b_1, .., b_m$.

Lehrs. 192. Auf jede Zahl u folgen Primzahlen.

Bew. für eine Primzahl $u > 2$. — Ist v das Produkt der Primzahlen von 2 bis u, so ist $v + 1 > u$ durch keine dieser Primzahlen teilbar. Ist also $v + 1$ keine Primzahl, so liegen seine Primfaktoren zwischen u und $v + 1$.

Def. 89. Natürliche Zahlen, die keinen Teiler außer 1 gemein haben, heißen teilerfremd, relativ prim, prim unter sich. Man sagt von ihnen, daß sie keinen Teiler gemein haben, nennt aber 1 dennoch ihren größten gemeinschaftlichen Teiler.

Lehrs. 193. Es seien a und b natürliche Zahlen, $a > b$, g ihr größter gemeinschaftlicher Teiler. Ist $a = ga'$, $b = gb'$, so sind a' und b' teilerfremd.

Wenn b in a aufgeht (also immer, wenn $b = 1$), so wird $g = b$. Ist $a = bq + r$, $0 < r < b \, (q > 0)$, so wird, wenn r in b aufgeht, $g = r$. In den übrigen Fällen kann man g folgendermaßen bestimmen.

Wir bezeichnen a, b, q, r mit a_0, a_1, q_1, a_2, so daß a_1 nicht in a_0, a_2 nicht in a_1 aufgeht, und

$$a_0 = a_1 q_1 + a_2, \quad a_0 > a_1 > a_2 > 0, \quad q_1 > 0.$$

Sind nun für irgend ein $i > 1$ die Zahlen a_{i-1} und a_i so definiert, daß $a_{i-1} > a_i > 0$, so soll, wenn a_i in a_{i-1} aufgeht, $a_{i-1} = a_i q_i$ geschrieben werden, anderenfalls aber

$$a_{i-1} = a_i q_i + a_{i+1}, \text{ so daß } a_i > a_{i+1} > 0, \; q_i > 0.$$

Da hierbei (Lehrs. 132) $i < a_0$ bleibt, so gibt es unter den i, zu denen ein a_i gehört, ein größtes, etwa n, und es ist

$$a_{h-1} = a_h q_h + a_{h+1} \text{ für } 0 < h < n, \quad a_{n-1} = a_n q_n, \quad g = a_n,$$

weil a_n in $a_{n-1}, a_{n-2}, .., a_1, a_0$ aufgeht und jeder gemeinschaftliche Teiler von a_0 und a_1 in $a_2, .., a_n$.

Jeder gemeinschaftliche Teiler von a und b geht in g auf.

Der größte gemeinschaftliche Teiler G_m von mehr als zwei Zahlen $A_0, .., A_m$ ist der von G_{m-1} und A_m.

Lehrs. 194. Für $0 < h < i < n$ gibt es α_h, β_h so, daß

$$a_{i+1} = a_h \alpha_h - a_{h-1} \beta_h.$$

Insbesondere gibt es α, β so, daß $g = b\alpha - a\beta$, auch (Lehrs. 179) wenn nicht $a > b$. Sind a und b teilerfremd, so wird $b\alpha - a\beta = 1$.

Bew. — Es ist $a_{i+1} = a_{i-1} - a_i q_i = a_i \alpha_i - a_{i-1} \beta_i$ (Lehrs. 179). Hat man aber für irgend ein k zwischen 0 und i:

$$a_{i+1} = a_{k+1} \alpha_{k+1} - a_k \beta_{k+1},$$

so wird $a_{i+1} = (a_{k-1} - a_k q_k) \alpha_{k+1} - a_k \beta_{k+1} = a_{k-1} \alpha_{k+1} - a_k (\alpha_{k+1} q_k + \beta_{k+1}) = a_k \alpha_k - a_{k-1} \beta_k$ (Lehrs. 179).

Lehrs. 195. Sind a und b teilerfremd, so ist c der größte gemeinschaftliche Teiler von ca und cb, da dann $c = cb\alpha - ca\beta$. Ist b Teiler von ac, aber teilerfremd gegen a, so ist b Teiler von c.

Eine Primzahl, die in einem Produkt aufgeht, geht mindestens in einem Faktor auf. Sind in einem Produkt alle Faktoren Primzahlen, so geht keine andere Primzahl > 1 darin auf. Jede zusammengesetzte natürliche Zahl kann nur auf eine Art in Primfaktoren > 1 zerlegt werden.

Für $r > 0$, $s > 0$ sind a^r und b^s dann und nur dann teilerfremd, wenn a und b es sind. Ist a^r teilbar durch b^r, so ist a teilbar durch b.

Lehrs. 196. Es seien a, b, A, B natürliche Zahlen, g der größte gemeinschaftliche Teiler von a und b, G der von A und B; ferner sei $a = ga'$, $b = gb'$, $A = GA'$, $B = GB'$. Ist dann $aB = bA$, so ist $a' = A'$, $b' = B'$, und umgekehrt.

Lehrs. 197. Ist c teilbar durch a und b, während a und b teilerfremd sind, so ist c teilbar durch ab.

Überhaupt: Ist c teilbar durch a und b, so ist es teilbar durch $ga'b'$; denn für ein gewisses δ wird $c = \delta a'b'$, g Teiler von $\delta a'$ und $\delta b'$, mithin von δ. Hiernach sind die gemeinschaftlichen Vielfachen von a und b die Vielfachen von $ga'b'$; $ga'b'$ ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b. (Vom Nullfachen ist hier abzusehen.) Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache V_m von mehr als zwei Zahlen $A_0, .., A_m$ ist das von V_{m-1} und A_m.

Lehrs. 198. Ist $m\nu > n\mu > 0$, $m\nu' > n\mu' > 0$ und

$$m\nu - n\mu = m\nu' - n\mu',$$

so ist $\nu' = \nu$ oder nicht, je nachdem $\mu' = \mu$ oder nicht. Es sei $\mu \neq \mu'$, etwa $\mu' > \mu$, mithin $\nu' > \nu$. Ist dann t der größte gemeinschaftliche Teiler von m und n, $m = tM$, $n = tN$, so ist $\mu' = \mu + lM$, $\nu' = \nu + lN$, wo l jede natürliche Zahl bedeuten kann.

Ist $m\nu > n\mu > 0$, $n\mu' > m\nu' > 0$ und (vergl. Lehrs. 179)

$$m\nu - n\mu = n\mu' - m\nu',$$

so ist $\mu' = kM - \mu$, $\nu' = kN - \nu$, wo k jede natürliche Zahl bedeutet, für die $kM > \mu$ und $kN > \nu$.

§ 26. Brüche.

Def. 90. Die benannte Zahl $(ma)D$, d. i. das Produkt $m \times (aD)$, kann mit $m \times E$ bezeichnet werden, wenn man aD mit E bezeichnet. Sie wird, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, auch mit mE oder $m(aD)$ bezeichnet, so daß dann

$$mE = (ma)D, \quad 0E = 0D, \quad 1E = aD.$$

Hier bedeutet mE nicht, wie nach Def. 71, einen Bestand an Dingen E, sondern einen Bestand an Dingen D.

Es sei $a = s\alpha$, so daß $\alpha D = s \times (\alpha D) = s(\alpha D)$. Wird zunächst $\alpha > 1$ und $s > 1$ vorausgesetzt, so heißt jedes αD ein genauer (aliquoter) Teil von $1E$, ein s^{ter} Teil von $1E$, ein $\big((s^{\text{tel}})\,E\big)$; bei $s = 2$ eine Hälfte von $1E$, ein (halbes E); bei $s = 3$ ein (drittel E). Insbesondere heißt $1D$ ein $\big((a^{\text{tel}})\,E\big)$.

Die benannte Zahl $(r\alpha)D$, d. i. das Produkt $r \times (\alpha D)$, wo zunächst $r \neq 0$ sein soll, wird mit $r\big((s^{\text{tel}})\,E\big)$ bezeichnet; mit $1\,(\text{halb}\,E)$ bei $s=2$, $r=1$; mit $r\,(\text{halbe}\,E)$ bei $s=2$, $r>1$; mit $r\,(\text{drittel}\,E)$ bei $s=3$. Diese Bezeichnung führt zu der Bezeichnung mit $\big(r\,(s^{\text{tel}})\big)E$, $(1\,\text{halb})\,E$, $(r\,\text{halbe})\,E$, $(r\,\text{drittel})\,E$. Im Fall $r<s$, d. i. $r\alpha<a$, heißt $\big(r\,(s^{\text{tel}})\big)E$ ein Bruchteil von $1E$.

Man führt noch für $0D$, d. i. $0 \times (\alpha D)$, die Bezeichnungen $0\big((s^{\text{tel}})\,E\big)$, $\big(0\,(s^{\text{tel}})\big)E$ und bei beliebigem r für $(r\alpha)D$, d. i. $r \times (\alpha D)$ oder rE, die Bezeichnungen $r\big((1^{\text{tel}})\,E\big)$, $r\,(\text{eintel}\,E)$, $\big(r\,(1^{\text{tel}})\big)E$, $(r\,\text{eintel})\,E$, insbesondere für rD die Bezeichnungen $r\big((1^{\text{tel}})\,D\big)$, $\big(r\,(1^{\text{tel}})\big)D$ ein.

Indem man $a>0$ und mithin $s>0$ festhält, schreibt man endlich $\left(\frac{r}{s}\right)E$ oder $\frac{r}{s}\,E$ für $(r\alpha)D$ bei beliebigem r.

Lehrs. 199. Sind r und s beliebig, $s>0$, so kann man für jedes $a=s\alpha$ mit $\alpha>0$ die Benennung D so wählen, daß es aD und $(r\alpha)D$ gibt, und dann aD mit E, $(r\alpha)D$ mit $\frac{r}{s}\,E$ bezeichnen.

Ist r ein Vielfaches von s, $r=bs$, so ist $r\alpha$ ein Vielfaches von a, $r\alpha=ab$, und umgekehrt. Folglich wird $\frac{r}{s}\,E=bE$ dann und nur dann, wenn $r=bs$.

Def. 91. Die Zahl b wird mit $\frac{b}{1}$, überhaupt mit $\frac{r}{s}$ bezeichnet, wo $s>0$ beliebig und $r=bs$.

Die Klammer um $\frac{r}{s}$ darf nicht fortgelassen werden: in dem Ausdruck $m\left(\frac{r}{s}\right)$, wenn m, r, s dekadische Zahlennamen sind; in den Potenzen von $\frac{r}{s}$; siehe auch Def. 92.

Lehrs. 200. Sind r, s, r', s' beliebig, s und $s'>0$, so kann man nach Annahme eines gemeinschaftlichen Vielfachen von s und s', $a=s\alpha=s'\alpha'$ mit $\alpha>0$ und $\alpha'>0$, die Benennung D so wählen, daß es aD, $(r\alpha)D$ und $(r'\alpha')D$ gibt. Bezeichnet man aD mit E, so wird

$$(r\alpha)D=\frac{r}{s}\,E,\quad (r'\alpha')D=\frac{r'}{s'}\,E.$$

Im Fall $\frac{r}{s}\,E=\frac{r'}{s'}\,E$ ist $rs'=r's$, und umgekehrt.

Def. 92. Wenn s in r nicht aufgeht, so tritt $\frac{r}{s}$ auf, als wäre es Eigenname eines Dinges k. Man nennt auch k eine Zahl, die Zahl der in $(r\alpha)D$ enthaltenen E, und bezeichnet es mit $\frac{\varrho}{\sigma}$, wo $\varrho s = r\sigma$ und $\sigma > 0$. Man nennt kE eine benannte, k eine unbenannte Zahl. Die Zahl k heißt eine gebrochene Zahl, Bruchzahl; die bisherigen Zahlen heißen ganze.

Durch die Einführung der gebrochenen Zahlen wird die Anwendung besonderer Namen für aliquote Teile von Benennungen $\left(D \text{ für } \frac{1}{a}E\right)$ entbehrlich.

Der Ausdruck $\frac{r}{s}$ heißt, auch wenn s in r aufgeht, ein gebrochener Ausdruck, ein Bruch, und zwar ein uneigentlicher Bruch, wenn s in r aufgeht, sonst ein eigentlicher Bruch. Man sagt aber auch „Bruch" für „gebrochene Zahl".

Als gebrochener Ausdruck — nicht als Bruch — ist auch $r : s$ zu bezeichnen.

Sind die Namen r und s dekadische Zahlennamen (im bisherigen Sinn), so nennen wir den Ausdruck $\frac{r}{s}$ einen dekadischen Namen von k.

Man nennt r den Zähler, s den Nenner (erstes, zweites Glied) des Ausdrucks $\frac{r}{s}$; Zähler und Nenner werden durch den „Bruchstrich" getrennt. Brüche mit demselben Nenner heißen gleichnamig.

Ist r oder s durch einen Bruch dargestellt, so wird das Einklammern durch Verlängern des Hauptbruchstrichs ersetzt. In anderen Fällen bedarf es überhaupt keiner Zusammenfassungszeichen.

Die Bruchzahlen mit dem Zähler 1 heißen Stammbrüche.

Lehrs. 201. Aus $\frac{r}{s} = \frac{\varrho}{s}$ folgt $r = \varrho$; aus $\frac{r}{s} = \frac{r}{\sigma}$ folgt $s = \sigma$, sofern $r \neq 0$.

Für $g > 0$ ist $\frac{r}{s} = \frac{gr}{gs}$. Man darf daher $\frac{r}{s}$ „mit g erweitern", $\frac{gr}{gs}$ „mit g kürzen (g darin heben)".

Brüche mit verschiedenen Nennern (auch dem Nenner 1) kann man auf gleiche Nenner bringen (gleichnamig machen), insbesondere auf den Generalnenner (das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der verschiedenen Nenner).

Def. 93. Ein Bruch heißt reduzibel oder irreduzibel, je nachdem er sich mit einer Zahl $g > 1$ kürzen läßt oder nicht.

Lehrs. 202. Jeder Bruch läßt sich auf eine und nur eine irreduzible Form, die „reduzierte Form", bringen (Lehrs. 196). Er ist dann „in den kleinsten Zahlen" ausgedrückt.

Für eigentliche Brüche gilt als fester Name (Lehrs. 165) der dekadische Name in reduzierter Form (siehe jedoch Lehrs. 206).

Lehrs. 203. Bezeichnet man wie in Lehrs. 200, so wird $r\alpha > r'\alpha'$, wenn $rs' > r's$, überhaupt wenn $\varrho\sigma' > \varrho'\sigma$, wo $\varrho s = r\sigma$, $\varrho's' = r'\sigma'$, σ und $\sigma' > 0$.

Im Fall $r = bs$, $r' = b's'$ ist $b > b'$, wenn $rs' > r's$.

Def. 94. Auch wenn nicht s in r und s' in r' aufgeht, heißt im Fall $rs' > r's$ die Zahl $\frac{r}{s}$ größer als $\frac{r'}{s'}$, $\frac{r'}{s'}$ kleiner als $\frac{r}{s}$. Das weitere wie in den Definitionen 55 und 56.

Die Zahl $\frac{r}{s}$ heißt echt gebrochen bei $0 < r < s$, d. i. $0 < \frac{r}{s} < 1$, unecht gebrochen bei $r \geq s$, d. i. $\frac{r}{s} \geq 1$.

Lehrs. 204. Von zwei Zahlen ist stets die eine die kleinere, die andere die größere. Bei $r > r'$ ist $\frac{r}{s} > \frac{r'}{s}$; bei $s < s'$ ist $\frac{r}{s} > \frac{r}{s'}$, sofern $r \neq 0$.

Ist $\varkappa < \lambda$, $\lambda < \mu$, so ist $\varkappa < \mu$. Gegebene Zahlen kann man „der Größe nach" ordnen.

Zu jeder Zahl gibt es größere Zahlen, größere ganze Zahlen, eine nächstgrößere ganze Zahl. Zu jeder von 0 verschiedenen Zahl gibt es kleinere Zahlen, eine nächstkleinere ganze Zahl.

Zwischen je zwei Zahlen liegen Zahlen, jedenfalls gebrochene.

§ 27. Rechnen mit Brüchen.

Lehrs. 205. Bei entsprechender Ausdehnung der in Lehrs. 200 angewendeten Bezeichnungsweise wird $r\alpha + r'\alpha' = r''\alpha''$, wenn $rs's'' + r'ss'' = r''ss'$, überhaupt $\varrho\sigma'\sigma'' + \varrho'\sigma\sigma'' = \varrho''\sigma\sigma'$, wo $\varrho s = r\sigma$, $\varrho's' = r'\sigma'$, $\varrho''s'' = r''\sigma''$ und $\sigma, \sigma', \sigma'' > 0$.

Im Fall $r = bs$, $r' = b's'$ wird dann $r'' = (b + b')s''$.

Def. 95. Auch wenn nicht s in r und s' in r' aufgeht, heißt unter der Voraussetzung $rs's'' + r'ss'' = r''ss'$ die Zahl $\frac{r''}{s''}$ die Summe der Zahlen $\frac{r}{s}$ und $\frac{r'}{s'}$. Das weitere wie in den Definitionen 57 und 58.

Erscheint eine Zahl als Summe, deren erstes Glied der dekadische Name einer natürlichen Zahl, deren zweites ein dekadischer Name einer echt gebrochenen Zahl ist, so ist es gebräuchlich, das Pluszeichen nebst der Klammer um den Bruch fortzulassen. Der Ausdruck heißt dann eine gemischte Zahl. Die gemischte Zahl ist zu den eigentlich gebrochenen Ausdrücken (Lehrs. 206) und den dekadischen Zahlennamen zu rechnen. Sie wird ohne Klammer vor eine Benennung gesetzt.

Ein in Bruchform geschriebener Addend wird nicht eingeklammert.

Lehrs. 206. Zu jeder Zahl kann man jede addieren. Gleichnamige Brüche addiert man, indem man die Zähler addiert.

Die Summe aus einer ganzen und einer gebrochenen Zahl ist eine gebrochene Zahl. Eine gemischte Zahl kann man in einen (unechten eigentlichen) Bruch verwandeln (einrichten). Jeden unechten eigentlichen Bruch aus dekadischen Zahlen kann man mittelst einer nicht aufgehenden Division als gemischte Zahl schreiben (zerlegen)*). Gemischte Zahlen sind nur dann gleich, wenn die Ganzen und die Bruchteile übereinstimmen.

Für beliebige u, v, w ist

$$u + 0 = u, \quad u + v = v + u, \quad (u + v) + w = u + (v + w).$$

Für $w > v$ ist $u + w > u + v$. Ist $u \geq v$, so gibt es eine und nur eine Zahl d derart, daß $v + d = u$.

Die Addition wird wieder auf beliebige Zahlenfolgen ausgedehnt wie in § 19. Sind die Addenden durch dekadische Namen angegeben, so pflegt man die unecht gebrochenen als ganze oder gemischte Zahlen zu schreiben und zuerst die Bruchteile zu addieren.

Def. 96. Die Zahl d in Lehrs. 206 heißt die Differenz der Zahlen u und v. Das weitere wie in Def. 74.

---

*) Für unechte eigentliche Brüche gilt als fester Name (Lehrs. 202) auch die gemischte Zahl in reduzierter Form.

Ein in Bruchform geschriebenes Glied der Differenz wird nicht eingeklammert.

Lehrs. 207. Von jeder Zahl kann man sie selbst und jede kleinere abziehen, aber keine größere. Das weitere wie in Lehrs. 162, 163, 165, 166.

Wird endlich das Aggregat wieder eingeführt wie in Def. 77, so bleibt Lehrs. 170 bestehen.

Lehrs. 208. Ist a beliebig, $b > 0$, so kann man zu jedem σ derart ϱ bestimmen, daß $a + yb > \sigma$ für alle $y > \varrho$.

Gehört zu jeder ganzen Zahl n eine Zahl a_n derart, daß $a_{n+1} \geqq a_n + b$, wo $b > 0$, so kann man zu jedem σ derart ϱ bestimmen, daß $a_n > \sigma$ für alle $n > \varrho$.

Lehrs. 209. Sind r, s, r', s' ganze Zahlen, s und $s' > 0$, so kann man die ganze Zahl $\alpha > 0$ so wählen, daß s' in $r\alpha$ aufgeht, etwa α'mal, und dann die Benennung D so, daß es aD, $(r\alpha)D$ und $(r'\alpha')D$ gibt, wo $a = s\alpha$. Es sei noch g der größte gemeinschaftliche Teiler von rr' und ss', $rr' = gR$, $ss' = gS$, so daß

$$S > 0,\ gSr'\alpha' = sr' \cdot s'\alpha' = sr' \cdot r\alpha = gRs\alpha,\ Sr'\alpha' = R\alpha,$$

a teilbar durch S, etwa $a = SA$, $r'\alpha' = RA$. Wird aD wieder mit E bezeichnet, so kommt:

$$\frac{r'}{s'}\left(\frac{r}{s}E\right) = (r'\alpha')D = (RA)D = \frac{R}{S}E = \frac{rr'}{ss'}E = \frac{\varrho\varrho'}{\sigma\sigma'}E,$$

wo $\varrho s = r\sigma$, $\varrho' s' = r'\sigma'$, σ und $\sigma' > 0$.

Im Fall $r = bs$, $r' = b's'$ wird $\varrho\varrho' = (bb')(\sigma\sigma')$.

Def. 97. Auch wenn nicht s in r und s' in r' aufgeht, heißt die Zahl $\frac{rr'}{ss'}$ das Produkt der Zahlen $\frac{r}{s}$ und $\frac{r'}{s'}$. Das weitere wie in Def. 78.

Ist $\frac{r'}{s'}$ eigentlich gebrochen, so heißt das Produkt auch: $\frac{r'}{s'}$ von $\frac{r}{s}$.

Folgt auf einen Faktor u ein Faktor v oder v'', und sind u und v dekadische Namen, so muß, falls sonst Unsicherheit in der Lesung eintreten kann, ein Multiplikationszeichen angewendet (oder u, v, v'' eingeklammert) werden (vergl. Def. 78, 85 und 91).

Lehrs. 210. Mit jeder Zahl kann man jede multiplizieren. Für beliebige u, v, w ist

$$u \cdot 1 = u, \quad uv = vu, \quad (uv)w = u(vw),$$
$$(u + v)w = uw + vw, \text{ mithin } u \cdot 0 = 0.$$

Sind u und v nicht 0, so ist uv nicht 0.

Die Multiplikation wird wieder auf beliebige Zahlenfolgen ausgedehnt wie in § 22. Sind die Faktoren durch dekadische Namen angegeben, so werden die gebrochenen, wenn sie unecht sind, bald als gemischte Zahlen geschrieben, bald eingerichtet.

Lehrs. 211. Zu jeder von 0 verschiedenen Zahl $v = \frac{r}{s}$ gehört eine und nur eine — die reziproke, umgekehrte — Zahl $v_1 = \frac{s}{r}$ derart, daß $vv_1 = 1$. Ist v ganz, so ist $v_1 = \frac{1}{v}$. Die einzige sich selbst reziproke Zahl ist 1.

Ist u beliebig, v nicht 0, so gibt es eine und nur eine Zahl $q = uv_1$ derart, daß $qv = u$. Sind u und v ganze Zahlen, so ist $q = \frac{u}{v}$; q wird also eine ganze Zahl, falls die Division von u durch v aufgeht, und zwar ist dann q der Quotient.

Def. 98. Auch wenn nicht u, v und q ganze Zahlen sind, heißt q der Quotient der Folge $u | v$, u durch v, $u : v$; q berechnen, heißt: u durch v dividieren (teilen), mit v in u dividieren; u heißt der Dividendus, v der Divisor des Ausdrucks $u : v$.

Für den Fall, daß u und v ganz sind, q aber nicht, stimmt dies nicht mit Def. 83 überein. Man kann „unvollständige“ und „vollständige“ Quotienten unterscheiden. Im folgenden ist immer der vollständige Quotient gemeint, wo nicht das Gegenteil zu erkennen ist.

Ein Bruch oder eine gemischte Zahl als Dividend oder Divisor wird nicht eingeklammert; siehe auch Def. 83.

Auch wenn nicht u und v ganze Zahlen sind, schreibt man $\frac{u}{v}$ für $u : v$. Der Bruchstrich wird Divisionszeichen.

Multiplikation und Division heißen die Rechnungen zweiter Stufe. Die Rechnungen erster und zweiter Stufe heißen die Grundrechnungen.

Lehrs. 212. Jede Zahl u kann durch jede von 0 verschiedene Zahl v dividiert werden. Division mit v ist Multiplikation mit der zu v reziproken Zahl v_1.

Multiplikation und Division mit derselben Zahl heben sich auf, d. h. es ist

$$uv : v = u, \quad (u : v)v = u,$$

worin enthalten ist, daß

$$u : 1 = u, \quad v : v = 1, \quad 0 : v = 0, \quad 1 : v = v_1, \quad 1 : v_1 = v.$$

Man nennt deshalb Multiplikation und Division einander entgegengesetzte Rechnungsarten, die Division die Umkehrung der Multiplikation.

Lehrs. 213. Ist $v > 0$, $v' > 0$, also $uv' = \frac{u}{v} vv'$, $u'v = \frac{u'}{v'} vv'$, so wird

$$\frac{u}{v} \gtreqless \frac{u'}{v'}, \text{ je nachdem } uv' \gtreqless u'v;$$

$$\frac{u}{v} \gtreqless 1, \text{ je nachdem } u \gtreqless v; \quad \frac{u}{v} = \frac{uv'}{vv'} = \frac{u : v'}{v : v'};$$

$$\frac{u}{v} > \frac{u'}{v}, \quad \frac{u}{v} > \frac{u}{v'}, \quad \frac{1}{v} > \frac{1}{v'} \text{ bei } u > u', \quad v < v';$$

$$\frac{u + u'}{v} = \frac{u}{v} + \frac{u'}{v}; \quad \frac{u - u'}{v} = \frac{u}{v} - \frac{u'}{v} \text{ bei } u \geqq u';$$

$$\frac{u}{v} \frac{u'}{v'} = \frac{uu'}{vv'}, \quad \frac{u}{v} u' = \frac{uu'}{v}; \quad \frac{u}{v} \frac{v}{u} = 1 \text{ bei } u > 0;$$

$$\frac{u}{v} : \frac{u'}{v'} = \frac{uv'}{vu'}, \quad \frac{u}{v} : u' = \frac{u}{vu'}, \text{ bei } u' > 0;$$

$$v : u \text{ reziprok zu } u : v \text{ bei } u > 0.$$

Lehrs. 214. Zu $a > 0$, $\varepsilon > 0$ gibt es $\varrho > 0$ derart, daß $a : v < \varepsilon$ für $v > \varrho$.

Zu $a > 0$, $\sigma > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, daß $a : v > \sigma$ für $v < \delta$.

Lehrs. 215. Ist u eine beliebige Zahl, a eine natürliche Zahl, für die au ganz wird, E eine benannte Zahl aD, so ist $uE = (au)D$.

Sind u und u' beliebige Zahlen, a und a' natürliche Zahlen, für die au und $a'u'$ ganz werden, E und E' benannte Zahlen aD und $a'D$, so ist $uE = u'E'$ unter der Bedingung $au = a'u'$.

Sind u, v, u', v' beliebige Zahlen derart, daß $uE = u'E'$ und $vE = v'E'$, so ist $uv' = u'v$, also $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$ im Fall $v > 0$.

Def. 99. Im Fall $v > 0$ heißt $\frac{u}{v}$ das Verhältnis der Folge $uE\ vE$, das Verhältnis der benannten Zahlen uE und vE (nicht vE und uE), das Verhältnis von uE zu vE; auch:

das Verhältnis der Zahl u zur Zahl v; kurz: uE zu vE, u zu v. Ist $\frac{u}{v}$ auch das Verhältnis einer Folge $UF|VF (V > 0)$, so sagt man: uE verhält sich zu vE, wie UF zu VF, wie u zu v; u verhält sich zu v, wie U zu V.

Eine Gleichung zwischen Verhältnissen

$$u : v = U : V, \text{ gelesen: } u \text{ zu } v \text{ wie } U \text{ zu } V,$$

heißt eine Proportion. Die Proportionen $u_1 : v = U_1 : V, \ldots, u_n : v = U_n : V$ faßt man zu einer „fortlaufenden Proportion“ zusammen:

$$u_1 : \cdots : u_n : v = U_1 : \cdots : U_n : V.$$

Lehrs. 216. Diese Proportion besteht dann und nur dann, wenn es eine Zahl $\lambda > 0$ derart gibt, daß $U_1 = \lambda u_1, \ldots, U_n = \lambda u_n$, $V = \lambda v$.

Gibt es eine Zahl λ derart, daß $U_1 = \lambda u_1, \ldots, U_n = \lambda u_n$, so gibt es Zahlen v, V derart, daß die obige Proportion besteht.

Def. 100. Die Folgen $u_1 \ldots u_n$ und $U_1 \ldots U_n$ heißen dann einander proportional; man schreibt:

$$u_1 : \cdots : u_n = U_1 : \cdots : U_n.$$

Def. 101. Für gebrochene Grundzahlen wird die Potenz mit ganzem Exponenten eingeführt, wie für ganze Grundzahlen in Def. 85.

Lehrs. 217. Es ist

$$(ab)^m = a^m b^m, \text{ wenn } m > 0 \text{ im Fall } ab = 0;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \text{ wenn } b > 0 \text{ und bei } a = 0 \text{ auch } m > 0;$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}, \text{ wenn } a > 0;$$

$$a^m a^n = a^{m+n}, \ (a^m)^n = a^{mn}, \text{ wenn } m \text{ und } n > 0 \text{ im Fall } a = 0;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ wenn } a > 0 \text{ und } m \geqq n.$$

Lehrs. 218. Die Potenzen einer gebrochenen Zahl außer der nullten sind wieder gebrochene Zahlen (Lehrs. 195).

Lehrs. 219. Für $a > 1$, $n > 1$ ist $a^n > a$. Für $0 < a < 1$, $n > 1$ ist $a^n < a$. Für $a < b$, $n > 0$ ist $a^n < b^n$.

Für $n > 0$, $\sigma > 0$ gibt es (Lehrs. 187) $\varrho > 0$ derart, daß $a^n > \sigma$ für $a > \varrho$. Es ist dann $b^n < 1 : \sigma$, sobald $b < 1 : \varrho$.

Für $n > 0$, $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, daß $a^n < \varepsilon$ für $a < \delta$.

Lehrs. 220. Für $a > 1$, $p < q$ ist $a^p < a^q$. Für $a > 1$, $\sigma > 0$ gibt es p derart, daß $a^q > \sigma$ für $q > p$.

Für $0 < a < 1$, $p < q$ ist $a^p > a^q$. Für $0 < a < 1$, $\varepsilon > 0$ gibt es p derart, daß $a^q < \varepsilon$ für $q > p$.

Bew. — Für $a > 1$, $n > 0$ ist $a^{n+1} - a^n = a^n(a-1) \geq a(a-1)$, $a^{n+1} \geq a^n + b$, wo $b = a(a-1) > 0$, usw. (Lehrs. 208).

Lehrs. 221. Wird $1 + a + a^2 + \cdots + a^n$ mit a_n bezeichnet, so ist

$$a_{n+1} = a_n + a^{n+1} = 1 + a a_n.$$

Für $a < 1$ ist mithin $(1-a)a_n = 1 - a^{n+1}$ und

$$a_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}, \quad \frac{1}{1-a} = a_n + b_n, \text{ wo } b_n = \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Zu jedem ε gibt es dann ϱ derart, daß $a^{n+1} < (1-a)\varepsilon$ und mithin $b_n < \varepsilon$ für $n > \varrho$.

Lehrs. 222. Zu jeder ganzen Zahl n gehöre eine Zahl c_n, und alle c_n seien $< C$ und $< C'$. Gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ sowohl ϱ derart, daß $C - c_n < \varepsilon$ für $n > \varrho$, als auch ϱ' derart, daß $C' - c_n < \varepsilon$ für $n > \varrho'$, so ist $C = C'$.

Bew. — Wäre nicht $C = C'$, sondern etwa $C' > C$, $C' = C + \eta$, so könnte man n so wählen, daß $C' - c_n < \eta$, also $C - c_n + \eta < \eta$.

§ 28. Dezimalbrüche.

Lehrs. 223. Es sei $\frac{\varrho}{\sigma}$ $(\varrho > 0, \sigma > 1)$ die reduzierte Form des eigentlichen Bruches $\frac{r}{s} = k$. Ist s eine Potenz von 10, so können s und σ keinen Primfaktor besitzen außer 2 und 5 (von 1 ist hier abzusehen). Besitzt umgekehrt σ keinen Primfaktor außer 2 und 5, ist also

$$\sigma = 10^h 2^i \text{ oder } 10^h 5^i, \text{ wo } h + i = n > 0,$$

so wird $\frac{\varrho}{\sigma}$ mit 5^i oder 2^i so zu $\frac{r}{s}$ erweitert, daß s eine Potenz von 10 wird, $s = 10^n$, r aber nicht teilbar durch 10. Da $\sigma > 2^n$, $2^n > n$ (Lehrs. 187), so ist $n < \sigma$, $10^{\sigma-1}k$ eine ganze Zahl.

Hierdurch wird k auf die nur in einer Weise mögliche Form

$$10^{m-1}a_m + \cdot \cdot + a_1 + \frac{b_1}{10} + \cdot \cdot + \frac{b_n}{10^n}$$

mit Ziffern a und b gebracht, wo $b_n > 0$ und bei $m > 1$ auch $a_m > 0$.

Man kann überhaupt k auf die nur in einer Weise mögliche Form (mit den obigen a und b)

$$10^{\mu-1}a_\mu + \cdot \cdot + a_1 + \frac{b_1}{10} + \cdot \cdot + \frac{b_\nu}{10^\nu}$$

bringen, wenn man $\mu \geqq m$ und $\nu \geqq n$ wählt; dabei ist

$$a_i = 0 \text{ für } i > m, \quad b_l = 0 \text{ für } l > n.$$

Auf diese Form, sowie auf die Form

$$10^{\mu-1}a_\mu + \cdot \cdot + a_1$$

kann man die $m$stellige ganze Zahl g bringen, wenn man $\mu \geqq m$ wählt; dabei ist $a_m > 0$ bei $m > 1$, $a_i = 0$ für $i > m$, $b_1 = \cdot \cdot = b_\nu = 0$.

Def. 102. Man drückt k oder g aus, indem man auf die Folge der Ziffern $a_\mu \cdot \cdot | a_1$, oder bei $\mu = 1$ auf die Ziffer a_1, die Folge der Ziffern $b_1 \cdot \cdot | b_\nu$, oder bei $\nu = 1$ die Ziffer b_1, folgen läßt, wobei zur Trennung ein Komma eingeschoben wird. Ein solcher Ausdruck heißt ein Dezimalbruch (Gegensatz: gemeiner Bruch), und zwar ein νstelliger; er ist zu den dekadischen Zahlennamen zu rechnen. Man nennt b_l die l^{te} Dezimalstelle in k oder g, $10^{i-1}a_i$ den Stellenwert der i^{ten} Ziffer vor dem Komma, $b_l : 10^l$ den der l^{ten} Ziffer nach dem Komma.

Die Darstellung von k mit $\mu = m$ und $\nu = n$ heißt im engeren Sinn der Dezimalbruch für k.

Ein Dezimalbruch braucht nicht eingeklammert zu werden: vor einer Benennung, als Glied eines Aggregats, als Dividend, als Divisor, als Grundzahl einer Potenz. Bezüglich der Anwendung des Multiplikationszeichens gilt das in Def. 97 Gesagte.

Lehrs. 224. Ein Dezimalbruch wird mit 10^α multipliziert, indem man das Komma im Fall $\nu > \alpha$ um α Stellen vorwärtsschiebt, im Fall $\nu = \alpha$ streicht, ebenso im Fall $\nu < \alpha$ nach Anfügung von $\alpha - \nu$ Nullen.

Ein Dezimalbruch wird durch 10^α dividiert, indem man das Komma um α Stellen rückwärts schiebt, im Fall $\mu \leqq \alpha$

nach Voranstellung von $a + 1 - \mu$ Nullen. Dies läßt sich auf ganze Zahlen ausdehnen.

Lehrs. 225. Dezimalbrüche und ganze Zahlen kann man als Dezimalbrüche mit gleichviel Dezimalen schreiben. Von zwei Dezimalbrüchen mit gleichviel Dezimalen ist der der größere, der nach Fortlassung der Kommas die größere Zahl darstellt.

Auch die Addition und Subtraktion kann dadurch, daß man die Schreibung mit gleichviel Dezimalen voraussetzt, auf den Fall ganzer Zahlen zurückgeführt werden. Sie liefert einen Dezimalbruch oder eine ganze Zahl.

Die Multiplikation eines Dezimalbruchs mit einer ganzen Zahl oder einem Dezimalbruch liefert ebenfalls einen Dezimalbruch oder eine ganze Zahl.

Lehrs. 226. Für die Division im Gebiet der ganzen Zahlen und Dezimalbrüche genügt es wieder, ganze Zahlen a, b zu betrachten, $b > 0$. Setzt man

$$A = \frac{a}{b} = c + \frac{r_1}{b}, \quad \frac{10\,r_i}{b} = c_i + \frac{r_{i+1}}{b}$$

für jede natürliche Zahl i, wo c, die c_i und die r_i ganz sein sollen, die $r_i < b$, so sind c, die c_i und die Zahlen $r_i : b$ bestimmt, die $c_i < 10$. Bezeichnet man weiter die Dezimalbrüche

$$c + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_i}{10^i} \text{ mit } d_i,\ c \text{ mit } d_0,$$

so wird für jede ganze Zahl i:

$$A = d_i + e_i, \text{ wo } e_i = \frac{r_{i+1}}{10^i b} = \frac{c_{i+1}}{10^{i+1}} + e_{i+1},$$

$$e_i < \frac{1}{10^i}, \quad \frac{c_{i+1}}{10^{i+1}} < e_i < \frac{c_{i+1} + 1}{10^{i+1}},$$

so daß $10^i d_i$ die Ganzen in $10^i A$ bedeutet.

Lehrs. 227. Läßt sich nun A als Dezimalbruch schreiben, so ist (Lehrs. 223) $10^{b-1} A$ eine ganze Zahl, also $= 10^{b-1} d_{b-1}$, d_{b-1} ein Dezimalbruch für A. Dabei werden e_{b-1}, r_b, $c_b = 0$, ebenso alle folgenden e, r, c.

Sollen alle c von einem bestimmten, etwa c_{u+1}, an verschwinden, so muß auch $r_{u+1} = 0$, A als Dezimalbruch d_u darstellbar sein. Denn dann folgt:

$$10\,r_{u+\nu} = r_{u+\nu+1}, \quad r_{u+\nu+1} = 10^{\nu} r_{u+1};$$

wäre also $r_{\mu+1} \neq 0$, so könnte man (Lehrs. 187) $r_{\mu+\varkappa+1} > b$ machen.

Lehrs. 228. Wie auch A beschaffen sei, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ (Lehrs. 220) ϱ derart, daß $A - d_i < \varepsilon$ für $i > \varrho$.

Liefert die Zahl A' für c und die c_i (also auch für die d_i) dieselben Werte wie A, so ist (Lehrs. 222) $A' = A$.

Lehrs. 229. Tritt $10^\alpha e_\alpha$ an Stelle von A, so gehen c, r_i, c_i in 0, $r_{i+\alpha}$, $c_{i+\alpha}$ über. Denn es ist

$$e_\alpha = \frac{r_{1+\alpha}}{10^\alpha b}, \quad 10^\alpha e_\alpha = 0 + \frac{r_{1+\alpha}}{b} \text{ usw.}$$

Lehrs. 230. Die Reste $r_1, .., r_{b+1}$ können nicht sämtlich verschieden sein. Ist r_{m+1} der erste Rest, der sich wiederholt, und zwar zuerst nach l Stellen, so sind $r_1, .., r_{m+l}$ $(m + l < b + 1)$ voneinander, $r_1, .., r_m$ auch von 0 verschieden, und es ist für alle $h > m$:

$$r_{h+l} = r_h, \quad r_{h+l'} = r_h \text{ nur wenn } l' \text{ Vielfaches von } l,$$

$$c_{h+l} = c_h, \quad e_{h+l-1} = \frac{e_{h-1}}{10^l}.$$

Es sei nun μ irgend eine Zahl, zu der $\lambda > 0$ so bestimmt werden kann, daß $c_{h+\lambda} = c_h$ für alle $h > \mu$. Dann haben c und die c_i für $10^{h+\lambda-1}e_{h+\lambda-1}$ dieselben Werte, wie für $10^{h-1}e_{h-1}$, sobald $h > \mu$ (Lehrs. 229). Daraus folgt:

$$10^{h+\lambda-1}e_{h+\lambda-1} = 10^{h-1}e_{h-1}, \quad r_{h+\lambda} = r_h \text{ für } h > \mu.$$

$$r_{\mu+1} = r_{\mu+1+\lambda}, \quad \mu > m, \quad \lambda \geqq l,$$

d. h.: die Werte von μ sind die ganzen Zahlen $\geqq m$, die von λ sind die Vielfachen von l.

Lehrs. 231. Bezeichnet man

$$c_{m+1}10^{l-1} + \cdot\cdot + c_{m+l-1}10 + c_{m+l} \text{ mit } P,$$

so ist P nicht nur $< 10^l$, sondern auch $< 10^l - 1$.

Bew. — Die Gleichung $P = 10^l - 1$ wäre nur möglich im Fall $l = 1$. Dann sind aber für $i > m$ alle c_i und alle r_i einander gleich; insbesondere ist dann für $i > m$:

$$10 r_i = b c_i + r_i, \quad b c_i = 9 r_i, \quad c_i < 9.$$

Lehrs. 232. Ist $P = 0$, d. h. (Lehrs. 227) läßt sich A als ganze Zahl oder als ein im engeren Sinn etwa $n$stelliger

Dezimalbruch schreiben, so stellt c die Ganzen darin dar, c_i die i^{te} Dezimalstelle im weiteren Sinn; b geht auf in $10^n a$, und es wird

$$A = d_n, \quad r_i \text{ und } c_i = 0 \text{ für } i > n, \quad r_i > 0 \text{ für } i < n.$$

In diesem Fall kann man $\mu = n$ und $\lambda = 1$ wählen und findet $m = n$, $l = 1$. Die Reste $r_1, .., r_n$ sind voneinander und von 0 verschieden.

Welchen Wert auch P haben mag, immer wird

$$d_{m+l} = d_m + \frac{P}{10^{m+l}}, \quad e_m = \frac{P}{10^{m+l}} + e_{m+l} = \frac{P}{10^{m+l}} + \frac{e_m}{10^l},$$

$$e_m = \frac{P}{10^m(10^l - 1)}, \quad A = d_m + \frac{1}{10^m}\,\frac{P}{10^l - 1}.$$

Lehrs. 233. Es sei jetzt μ irgend eine ganze, λ irgend eine natürliche Zahl; man wähle die ganze Zahl γ und die Ziffern $\gamma_1, .., \gamma_{\mu+\lambda}$ beliebig und setze fest, daß $\gamma_{h+\lambda} = \gamma_h$ für $h > \mu$. Wird dann bezeichnet:

$$\gamma = \delta_0, \quad \gamma + \frac{\gamma_1}{10} + \cdots + \frac{\gamma_i}{10^i} = \delta_i, \quad \gamma_{\mu+1} 10^{\lambda-1} + \cdots + \gamma_{\mu+\lambda} = \Pi,$$

so kommt für jede natürliche Zahl g:

$$\delta_{\mu+g\lambda} = \delta_{\mu+(g-1)\lambda} + \frac{\Pi}{10^{\mu+g\lambda}},$$

$$\delta_{\mu+g\lambda} + \frac{1}{10^{\mu+g\lambda}}\,\frac{\Pi}{10^\lambda - 1} = \delta_{\mu+(g-1)\lambda} + \frac{1}{10^{\mu+(g-1)\lambda}}\,\frac{\Pi}{10^\lambda - 1}.$$

Die hiernach von g unabhängige Zahl

$$\delta_{\mu+g\lambda} + \frac{1}{10^{\mu+g\lambda}}\,\frac{\Pi}{10^\lambda - 1} = \delta_\mu + \frac{1}{10^\mu}\,\frac{\Pi}{10^\lambda - 1}$$

werde mit A bezeichnet.

Ist nun Π nicht nur $< 10^\lambda$, sondern auch $< 10^\lambda - 1$, d. h. sind die Ziffern $\gamma_{\mu+1}, .., \gamma_{\mu+\lambda}$ nicht sämtlich 9, so fallen für diese Zahl A die d_i mit den δ_i zusammen, mithin c mit γ, die c_i mit den γ_i. Denn dann bedeutet $10^k \delta_k$ für $k = \mu + g\lambda$ die Ganzen in $10^k A$, ist also $= 10^k d_k$; ist aber $d_k = \delta_k$, so ist auch $d_i = \delta_i$ für alle $i < k$.

Ist dagegen $\Pi = 10^\lambda - 1$, so wird A durch einen Dezimalbruch dargestellt, indem man $10^h \delta_h + 1$ für irgend ein $h > \mu_0$ durch 10^h dividiert, wo μ_0 den kleinsten für μ wählbaren Wert bedeuten möge; λ kann man $= 1$ nehmen.

In beiden Fällen gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ derart ϱ, daß $A - \delta_i < \varepsilon$ für $i > \varrho$, und zwar gilt dies für keine andere Zahl als A.

Def. 103. Ist die Zahl A weder ganz noch durch einen Dezimalbruch gemäß Def. 102 darstellbar, so kann sie dadurch ausgedrückt werden, daß man an den Dezimalbruch für d_m die Folge der Ziffern $c_{m+1} \,..\, c_{m+l}$, oder bei $l = 1$ die Ziffer c_{m+1}, überstrichen anfügt. Ein solcher Ausdruck heißt ebenfalls ein Dezimalbruch, und zwar ein periodischer, mit der Periode $c_{m+1} \,..\, c_{m+l}$ oder c_{m+1} (Gegensatz: gewöhnlicher, endlicher, geschlossener Dezimalbruch). Er ist zu den dekadischen Zahlennamen zu rechnen. Man nennt c_i die i^{te} Dezimalstelle usw., wie in Def. 102.

Man kann dies auf den Fall $\lambda = 1$, $\Pi = 9$ ausdehnen.

Lehrs. 224 bleibt bestehen.

§ 29. Die Zahl Unendlich.

Def. 104. Gibt es beliebig viele Dinge mit dem Gemeinnamen D (d. h.: kann man, wie auch die ganze Zahl n gewählt wird, mehr als nD angeben), so sagt man: es gibt unendlichviele D. Das Wort „unendlichviele“ tritt hier wie ein Zahlwort auf und wird deshalb so behandelt, als wäre es Name einer Zahl. Diese Zahl bezeichnet man mit ∞ und liest „Unendlich“, wenn keine Benennung dabeisteht. Die bisherigen Zahlen heißen endliche.

Man sagt: die Anzahl der D ist ∞. — Beispiele: die natürlichen, geraden, ungeraden Zahlen.

Bem. — Es gibt keine allgemeine Vorschrift für die Entscheidung, ob es mehr als nD gibt, ob es beliebig viele D gibt.

Def. 105. Ist von zwei Zahlen die eine endlich, die andere ∞, so heißt jene die kleinere, diese die größere.

Lehrs. 234. Zur Zahl ∞ gibt es keine größere. Im übrigen gilt Lehrs. 204 weiter, wenn r, s, r', s' endliche ganze Zahlen bleiben. Man kann jetzt sagen: zu jeder Zahl gibt es unendlichviele größere Zahlen usw.

Lehrs. 235. Bedeutet n jede ganze Zahl, so werden die ungeraden Zahlen den geraden Zahlen durch die Paarreihen

$2n \mid 2n+1$ total, durch die Paarreihen $2n+2 \mid 2n+1$ exzessiv, durch die Paarreihen $2n \mid 2n+3$ defektiv „zugeordnet“.

Wenn also die Anzahl von Dingen A und von Dingen A unendlich ist, so schließen totale, exzessive, defektive Zuordnung der A zu den A einander nicht aus.

Lehrs. 236. Es seien p und q Gemeinnamen für gewisse Zahlen, unter denen beliebig große vorkommen, aber weder 0 noch ∞; g sei Gemeinname für gewisse Zahlen, unter denen beliebig kleine vorkommen, aber weder 0 noch ∞; α bedeute irgend eine endliche, β eine endliche und von 0 verschiedene Zahl. Dann werden $p+\alpha$, $p+q$, $p\beta$, pq, $\beta:g$, $p:\beta$, $p:g$ beliebig groß.

Weiter werde $p+\alpha$ mit p_0 bezeichnet, $2p$ mit p', βp mit p'', $1:g$ mit q', $1:g^2$ mit q'', βg mit g', g^2 mit g'', so daß p_0, p', p'', q', q'' beliebig groß, g', g'' beliebig klein werden können, aber weder 0 noch ∞. Dann wird

$$p_0 - p = \alpha, p' - p = p; \quad g'q' = \beta, \quad g''q' = g, \quad gq'' = q';$$
$$p'' : p = \beta,\ q' : q'' = g,\ q'' : q' = q';\ g' : g = \beta,\ g'' : g = g,\ g : g'' = q'.$$

Hierdurch rechtfertigen sich folgende Festsetzungen:

Def. 106. Kommt in einer Zahlenfolge die Zahl ∞ vor, so wird als Summe der Folge die Zahl ∞ bezeichnet. Das weitere wie in Def. 57, 58, 67, 68.

Als Differenz $\infty - \alpha$ wird ∞ bezeichnet, dagegen von einer Differenz $\infty - \infty$ abgesehen. Das weitere wie in Def. 74 und 77.

Kommt in einer Zahlenfolge ∞ vor, aber nicht 0, so wird als Produkt der Folge die Zahl ∞ bezeichnet; von einem Produkt $0 \cdot \infty$ oder $\infty \cdot 0$ wird abgesehen. Das weitere wie in Def. 78 (abgesehen vom Eingang), 79, 80, 81.

Als Quotient $\infty : \beta$, $\beta : 0$, $\infty : 0$ wird ∞, als Quotient $\beta : \infty$, $0 : \infty$ wird 0 bezeichnet; von Quotienten $0 : 0$, $\infty : \infty$ wird abgesehen. Man nennt 0 und ∞ einander reziprok. Weitere Bezeichnungen wie in Def. 98.

Lehrs. 237. Beliebige Zahlen kann man addieren. Die Summe ist assoziativ und kommutativ; Lehrs. 148 gilt weiter, Lehrs. 149 nur teilweise.

Von jeder Zahl kann man jede kleinere abziehen, von jeder endlichen auch sie selbst. Die Differenz wächst nur bei

endlichem Minuenden, wenn der Subtrahend abnimmt. Im übrigen gelten Lehrs. 162, 163, 165, 166, 170.

Beliebige Zahlen kann man multiplizieren, außer wenn 0 und ∞ darunter sind. Das Produkt ist kommutativ, distributiv und assoziativ; es wächst, wenn ein oder mehrere Faktoren wachsen, falls nicht ein anderer Faktor 0 oder ∞ ist. Im übrigen gelten Lehrs. 176 und 177.

Man kann mit jeder Zahl in jede dividieren, außer mit 0 in 0, mit ∞ in ∞. Division durch 0 oder ∞ ist Multiplikation mit der reziproken Zahl. Es ist

$$\frac{u+u'}{0} = \frac{u}{0} + \frac{u'}{0} \text{ für } u > 0,\ u' > 0,$$

$$\frac{u+u'}{\infty} = \frac{u}{\infty} + \frac{u'}{\infty} \text{ für endliche } u \text{ und } u',$$

$$\frac{u-u'}{\infty} = \frac{u}{\infty} - \frac{u'}{\infty} \text{ für } u' \leq u < \infty, \text{ usw.}$$

Def. 107. Als Potenz ∞^n für jede natürliche Zahl n, sowie als Potenz a^∞ für $a > 1$ gilt ∞, als a^∞ für $a < 1$ gilt 0. Von Potenzen 0^0, ∞^0, 1^∞ wird abgesehen.

§ 30. Negative Zahlen.

Def. 108. Es seien l und m endliche Zahlen, a eine natürliche Zahl, für die al und am ganz werden, E eine benannte Zahl aD. Sind dann lE und $lE + mE$ die Bestände an Dingen D in den Mengen L und M, so sagt man: der Bestand an D in M unterscheidet sich von dem in L um mE. Ebenso kann man sich ausdrücken, wenn $l \geq m > 0$ und $lE - mE$ der Bestand an D in M. Soll jedoch immer erkannt werden, ob Addition oder Subtraktion vorliegt, so wendet man diese Ausdrucksweise nur im ersten Falle an; im zweiten sagt man: der Bestand an D in M unterscheidet sich von dem in L um $-mE$ oder $(-m)E$.

In dem Ausdruck $(-m)E$ mit $m > 0$ tritt $-m$ auf, als wäre es Eigenname eines Dinges n. Man nennt auch n eine Zahl, und zwar eine negative Zahl; n heißt ganz oder gebrochen, je nachdem m ganz oder gebrochen ist. Ist m ganz, so heißt n gerade oder ungerade, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Die bisherigen Zahlen heißen absolute, die

absoluten mit Ausnahme der 0 heißen positive Zahlen. Die positive Zahl m bezeichnet man auch mit $+m$. Die Zeichen plus, minus heißen die Vorzeichen (kurz: die Zeichen) der Zahlen $+m$, $-m$; m heißt der absolute Wert (Absolutwert, absoluter Betrag, Betrag) von $+m$ und $-m$, geschrieben: abs m, abs $(+m)$, abs $(-m)$ oder $|m|$, $|+m|$, $|-m|$.

Von den Zahlen m, $-m$ heißt jede die entgegengesetzte zur andern; 0 heißt sich selbst entgegengesetzt. Jede Zahl q wird auch mit $+q$, die entgegengesetzte mit $-q$ bezeichnet, so daß $0 = +0 = -0$. Die Zeichen plus, minus heißen die Vorzeichen der Ausdrücke $+q$, $-q$; jedes heißt das entgegengesetzte zum andern.

Unter dem Absolutwert von 0 versteht man 0. Alle Zahlen mit endlichem Absolutwert heißen endlich.

Die Ausdrücke $+q$ und $-q$, sowie für q eintretende Ausdrücke brauchen nicht immer eingeklammert zu werden. Klammern sind überhaupt entbehrlich, wo Unsicherheit in der Lesung nicht zu befürchten ist (vgl. Def. 97).

Def. 109. Jede negative Zahl heißt kleiner als jede absolute. Von zwei negativen Zahlen heißt die die kleinere, deren Absolutwert der größere ist.

Lehrs. 238. Von zwei Zahlen ist stets die eine die kleinere, die andere die größere. Ist $\varkappa < \lambda$, $\lambda < \mu$, so ist $\varkappa < \mu$. Zu jeder Zahl außer ∞ gibt es (unendlichviele) größere Zahlen, eine nächstgrößere ganze Zahl. Zu jeder Zahl gibt es (unendlichviele) kleinere Zahlen, eine nächstkleinere ganze Zahl. Zwischen je zwei Zahlen liegen (unendlichviele) Zahlen, jedenfalls gebrochene.

Def. 110. Sind α, β endliche absolute Zahlen, und ist $a = \pm\alpha$, $b = \pm\beta$, so kann man die endliche absolute Zahl l so wählen, daß das Aggregat $l \pm \alpha \pm \beta$ möglich wird. Ist dieses Aggregat $= l \pm \gamma$ (Lehrs. 165, 166), so ist die Zahl $c = \pm\gamma$ von l unabhängig und heißt auch jetzt die Summe der Folge $a \mid b$. Unter der Summe der Folge $\infty \mid b$ oder $b \mid \infty$ versteht man auch jetzt ∞. Das weitere wie in Def. 57, 58, 67, 68.

Lehrs. 239. Beliebige Zahlen kann man addieren. Die Summe ist assoziativ und kommutativ: Lehrs. 148 bleibt bestehen.

Der Addend 0 kann fortgelassen werden. Die Summe von Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist die mit diesem ver-

sehene Summe der Beträge. Die Summe von zwei entgegengesetzten Zahlen ist 0. Die Summe von zwei anderen Zahlen mit verschiedenem Vorzeichen ist die mit dem Vorzeichen der absolut größeren versehene Differenz der Beträge.

Ist die Zahl u beliebig, v endlich, $-v = v'$, $u + v' = d$, so ist $v + d = u$.

Def. 111. Die Zahl d heißt auch jetzt die Differenz der Zahlen u und v. Das weitere wie in Def. 74 und 77.

Lehrs. 240. Von jeder Zahl kann man jede subtrahieren, außer ∞. Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich auf. Lehrs. 170 gilt weiter. Es ist*)

$$-a = 0 - a,\ a + (\pm b) = a \pm b,\ a - (\pm b) = a \mp b,$$
$$a + (\pm b \pm c \pm \cdot \cdot) = a \pm b \pm c \pm \cdot \cdot,$$
$$a - (\pm b \pm c \pm \cdot \cdot) = a \mp b \mp c \mp \cdot \cdot,$$
$$-(\pm a \pm b \pm \cdot \cdot) = \mp a \mp b \mp \cdot \cdot$$

Def. 112. Statt „∞ addieren“ sagen wir auch „$-\infty$ subtrahieren“. Dadurch kommt der Ausdruck $-\infty$ in Gebrauch, als wäre er Eigenname eines Dinges, einer negativen Zahl. Die „unendlichen“ Zahlen ∞, $-\infty$ heißen einander entgegengesetzt, ∞ ihr Absolutwert.

Die nunmehr eingeführten endlichen und unendlichen Zahlen heißen die rationalen Zahlen.

Def. 113. Die Zahl $-\infty$ heißt kleiner als jede andere.

Unter der Summe aus der Zahl $-\infty$ und einer endlichen Zahl oder aus $-\infty$ und $-\infty$ versteht man $-\infty$. Von einer Summe aus $+\infty$ und $-\infty$ wird abgesehen.

Unter der Differenz aus einer endlichen Zahl und der Zahl ∞ oder aus $-\infty$ und einer endlichen Zahl oder aus $-\infty$ und ∞ versteht man $-\infty$. Daß $a - (-\infty) = a + \infty$, ist schon angegeben; dabei ist $a = -\infty$ auszuschließen.

Lehrs. 241. Zu jeder Zahl außer $-\infty$ gibt es kleinere Zahlen. Im übrigen gilt Lehrs. 238 weiter.

Beliebige Zahlen kann man addieren, wenn nicht ∞ und $-\infty$ darunter vorkommen. Es ist $a + b = 0$ nur bei $b = -a$,

*) Die Bedingungen für die Zulässigkeit der auftretenden Ausdrücke zu ergänzen, wird künftig in der Regel dem Leser überlassen.

$a + b = a$ nur bei $b = 0$ oder $a = \pm \infty$. Ist a endlich, so ist $a + b > a$ bei $b > 0$, $a + b < a$ bei $b < 0$. Kommt der Addend $- \infty$ vor, so wächst die Summe nur, wenn $- \infty$ durchweg durch eine andere Zahl ersetzt wird. Sind alle Addenden endlich, so wächst die Summe, wenn ein Addend wächst. Wächst die Summe und ändert sich nur ein Addend, so ist dieser gewachsen. Im übrigen gilt Lehrs. 239 weiter.

Von jeder Zahl kann man jede subtrahieren, nur nicht ∞ von ∞, $- \infty$ von $- \infty$. Es ist $a - b = 0$ nur bei $a = b$, $a - b = a$ nur bei $b = 0$ oder $a = \pm \infty$. Ist a endlich, so ist $a - b < a$ bei $b > 0$, $a - b > a$ bei $b < 0$. Die Differenz wächst bei endlichem Subtrahenden, wenn der Minuend wächst; bei endlichem Minuenden, wenn der Subtrahend abnimmt. Im übrigen gilt Lehrs. 240 weiter.

Subtraktion einer Zahl ist Addition der entgegengesetzten. Mittelst der negativen Zahlen werden also Addition und Subtraktion auf einen Begriff zurückgeführt. Überhaupt schaffen wir uns mittelst der negativen Zahlen in Fällen, wo zwei Arten von Veränderungen so auftreten, daß die der einen Art durch die der anderen paarweise aufgehoben werden, die Möglichkeit, beide Arten durch eine Ausdrucksweise zu umfassen.

Lehrs. 242. Der Betrag der Summe ist gleich der Summe der Beträge, wenn die Addenden von gleichem Zeichen oder nicht alle endlich sind; in den übrigen Fällen ist der Betrag der Summe kleiner als die Summe der Beträge. Der Betrag der Summe von zwei Zahlen ist gleich der absoluten Differenz der Beträge, wenn die Glieder nicht von gleichem Zeichen oder nicht beide endlich sind; in den übrigen Fällen ist der Betrag der Summe größer als die Differenz der Beträge. Entsprechendes gilt für den Betrag der Differenz.

Vorbemerkung zu Def. 114. — Die Sätze, die sich durch Gleichungen darstellen lassen, kann man formal nennen. Die formalen Eigenschaften, die Summe und Differenz ursprünglich besaßen, sind ihnen in dem alle rationalen Zahlen umfassenden Gebiet verblieben. Will man in diesem Gebiet auch Multiplikation so einführen, daß die formalen Eigenschaften des Produkts erhalten bleiben, so muß man für endliche absolute Zahlen a, b setzen:

$$a(-b) = a(0-b) = 0 - ab = -ab,$$
$$(-a)b = b(-a) = -ab,$$
$$(-a)(-b) = (-a)(0-b) = (-a)0 - (-a)b = 0 - (-ab) = ab.$$

Def. 114. Unter dem Produkt aus zwei negativen Zahlen versteht man das Produkt der Beträge, unter dem Produkt aus einer absoluten Zahl und einer negativen oder umgekehrt das negativ genommene Produkt der Beträge; von einem Produkt aus 0 und einer unendlichen Zahl wird abgesehen. Das weitere wie in Def. 78 (abgesehen vom Eingang), 80, 81.

Lehrs. 243. Beliebige Zahlen kann man multiplizieren, wenn nicht neben 0 ein unendlicher Faktor vorkommt. Der Betrag des Produkts ist das Produkt der Beträge. Ist ein Faktor 0, so ist das Produkt 0; ist kein Faktor 0, so ist das Produkt positiv oder negativ, je nachdem negative Faktoren in gerader oder in ungerader Anzahl vorkommen. Es ist $-a = (-1)a$.

Das Produkt ist kommutativ, assoziativ und distributiv. Wächst in einem Produkt ab der eine Faktor, während der andere, sich nicht ändernde, endlich und von 0 verschieden ist, so nimmt das Produkt zu oder ab, je nachdem dieser positiv oder negativ ist. Wächst das Produkt ab, ohne daß a sich ändert, so hat b zugenommen bei $a > 0$, abgenommen bei $a < 0$.

Im übrigen gelten die Lehrsätze 176 und 178 weiter. Die formalen Eigenschaften des Produkts bleiben erhalten.

Lehrs. 244. Versteht man unter dem Signum (auch wohl Zeichen) der Zahl a (sgn a) 1 im Fall $a > 0$, -1 im Fall $a < 0$, 1 oder -1 im Fall $a = 0$, so ist $a = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{abs} a$.

Treten zu den Faktoren des Produkts $a_1 \,.\,.\, a_n$ die Zeichen $\varepsilon_1, \,.\,.\,, \varepsilon_n$, so tritt zu dem Produkt das Zeichen $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_n$.

Lehrs. 245. Zu jeder endlichen, von 0 verschiedenen Zahl v gehört eine und nur eine Zahl v_1 derart, daß $vv_1 = 1$. Ist u beliebig, so gibt es eine und nur eine Zahl $q = uv_1$ derart, daß $qv = u$.

Def. 115. Auch wenn nicht u und v absolute Zahlen sind, heißt q der Quotient der Folge $u\ v$, usw. wie in Def. 98. Die Zahlen v und v_1 heißen auch jetzt einander reziprok. Als

reziproke Zahl zu $-\infty$ gilt 0, als reziproke Zahlen zu 0 gelten ∞ und $-\infty$. Durch ∞ oder $-\infty$ dividieren, heißt: mit 0 multiplizieren; durch 0 dividieren, heißt: mit ∞ oder $-\infty$ multiplizieren.

Lehrs. 246. Man kann mit jeder Zahl in jede dividieren, außer mit 0 in 0, mit $\pm\infty$ in $\pm\infty$. Division durch eine Zahl ist Multiplikation mit der reziproken. Die einzigen sich selbst reziproken Zahlen sind 1 und -1.

Der Betrag des Quotienten ist der Quotient der Beträge. Ist der Dividend 0 oder der Divisor $\pm\infty$, so ist der Quotient 0; ist der Divisor 0, so gilt als Quotient $+\infty$ oder $-\infty$. In den übrigen Fällen ist der Quotient positiv oder negativ, je nachdem Dividend und Divisor gleiches oder verschiedenes Zeichen haben. Es ist, wenn a und a_1 reziprok sind:

$$\frac{1}{a} = a_1, \ \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} a_1, \ \frac{1}{|a|} = |a_1|,$$

$$\frac{ab}{b} = \frac{a}{b}b = \frac{a}{1} = a, \ \frac{b}{b} = 1,$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \ \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c},$$

$$\frac{a}{b}\frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}, \ \frac{a}{b}a' = \frac{aa'}{b}, \ \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{aa'}{ba'} = \frac{-a}{-b}, \ \frac{b}{a} \text{ reziprok zu } \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{ba'}, \ \frac{a}{b} : a' = \frac{a}{ba'}, \ a : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{a'}.$$

Auch der Quotient behält mithin die formalen Eigenschaften.

Def. 116. Für negative endliche Grundzahlen wird die Potenz mit ganzen, nicht negativen Exponenten eingeführt, wie für endliche absolute Grundzahlen in Def. 85 und 101. Als Potenz $(-\infty)^{\nu}$ für jede natürliche Zahl ν gilt $(-1)^{\nu}\infty$; als Potenz a^{∞} für $a < -1$ gilt ∞ oder $-\infty$; als Potenz a^{∞} für $0 > a > -1$ gilt 0. Von Potenzen $(-\infty)^0$, $(-1)^{\infty}$ wird abgesehen.

Lehrs. 247. Es ist auch jetzt $a^0 = 1$, $a^1 = a$ und

$$(ab)^m = a^m b^m, \ (-a)^m = (-1)^m a^m,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\mu} = \frac{a^{\mu}}{b^{\mu}}, \ \left(\frac{1}{a}\right)^{\mu} = \frac{1}{a^{\mu}} \text{ für endliche } \mu,$$

$$a^m a^n = a^{m+n}, \ (a^m)^n = a^{mn}, \ \frac{a^{m'}}{a^m} = a^{m'-m} \text{ für } m \leq m'.$$

Def. 117. Die m^{te} Potenz von $\frac{1}{a}$ heißt auch bei $m \neq 0$ die $(-m)^{te}$ Potenz von a, usw. Von Potenzen $1^{-\infty}$, $(-1)^{-\infty}$ wird abgesehen.

Lehrs. 248. Für jede natürliche Zahl ν ist $\infty^{-\nu} = (-\infty)^{-\nu} = 0$; für abs $a > 1$ ist $a^{-\infty} = 0$; für $0 < a < 1$ ist $a^{-\infty} = \infty$; für $0 \geqq a > -1$ ist $a^{-\infty} = \pm\infty$.

Die Potenz behält ihre formalen Eigenschaften, da Lehrs. 247 bestehen bleibt, auch für $m > m'$.

Der Betrag der Potenz ist die Potenz des Betrages; bei negativer Grundzahl ist das Zeichen 1 oder -1, je nachdem der Exponent gerade oder ungerade ist.

§ 31. Näherungswerte.

Def. 118. Sind u und δ endliche Zahlen, $\delta > 0$, und ist

$$u - \delta < v < u + \delta, \text{ d. h. } |v - u| < \delta,$$

so sagt man von v, daß es u für das Genauigkeitsmaß δ (mit der Annäherung, Genauigkeit δ) darstellt.

Stellt $1 : v$ die 0 mit der Genauigkeit δ dar, so sagen wir von v, daß es ∞ oder $-\infty$ mit der Genauigkeit δ darstellt, je nachdem v positiv oder negativ ist.

Lehrs. 249. (Vgl. Lehrs. 214, 219, 220.) Sind a und v positiv, a endlich, so stellt $a : v$ die Zahl ∞ mit beliebiger Genauigkeit dar, wenn v die 0 mit hinreichender Genauigkeit darstellt. Damit soll gesagt sein: zu jeder endlichen positiven Zahl ε kann eine endliche positive Zahl δ so bestimmt werden, daß die Zahl ∞ durch $a : v$ immer mit der Genauigkeit ε dargestellt wird, wenn man 0 durch v mit der Genauigkeit δ darstellt.

Ist a endlich, so stellt $a : v$ die 0 mit beliebiger Genauigkeit dar, wenn v entweder ∞ oder $-\infty$ mit hinreichender Genauigkeit darstellt.

Für jeden positiven Exponenten liegt a^n beliebig nahe bei der Zahl 0 oder ∞, wenn a ihr hinreichend nahe kommt. Für hinreichend große positive n liegt abs a^n beliebig nahe bei 0, wenn abs $a < 1$, bei ∞, wenn abs $a > 1$.

Lehrs. 250. (Vgl. Lehrs. 222.) Es seien $x, y, \ldots$ Gemeinnamen von Zahlen und F ein Ausdruck, in dem sie vorkommen.

Liegt dann F in beliebiger Nähe bei einer Zahl F_0, solange $x, y, ..$ gewissen Zahlen $x_0, y_0, ..$ hinreichend nahe bleiben, so gilt dies für keine von F_0 verschiedene Zahl F_1. Denn man kann ε so wählen, daß keine Zahl zugleich F_0 und F_1 mit der Genauigkeit ε darstellt.

Lehrs. 251. Die Summe oder Differenz, überhaupt jedes Aggregat wird mit beliebiger Genauigkeit erhalten, wenn man die Glieder mit hinreichender Genauigkeit darstellt.

Bew. für die Summe. — Es sei zuerst die Summe s der endlichen Zahlen $a_1 .. a_n$ vorgelegt. Bezeichnet man $\varepsilon : n$ mit δ, mit $b_1 .. b_n$ solche Zahlen, daß $|b_1 - a_1| < \delta, .., |b_n - a_n| < \delta$, mit s' die Summe dieser Zahlen, so wird (Lehrs. 242):

$$|s' - s| < |b_1 - a_1| + \cdots + |b_n - a_n| < n\delta, \quad |s' - s| < \varepsilon.$$

Liegt jetzt die Summe von n Addenden ∞ vor, so bezeichne man $n\varepsilon$ mit δ, mit $b_1 .. b_n$ Zahlen $> 1 : \delta$, mit s' ihre Summe. Dann wird $s' > 1 : \varepsilon$.

Hat man μ Addenden ∞ und ν endliche Addenden $a_1 .. a_\nu$, so bezeichne man mit A eine endliche Zahl, die $|a_1|, .., |a_\nu|$ übertrifft, mit d den kleinsten der Beträge von $A - |a_1|, .., A - |a_\nu|$. Wählt man dann

$$\delta \text{ kleiner als } d \text{ und } \frac{\mu\varepsilon}{1 + \nu A \varepsilon},$$

$u_1 > 1 : \delta, .., u_\mu > 1 : \delta$, b_1 zwischen $a_1 - \delta$ und $a_1 + \delta, ..,$ b_ν zwischen $a_\nu - \delta$ und $a_\nu + \delta$ und bezeichnet die Summe der u und b mit s', so wird

$$b_1 = a_1 + (b_1 - a_1), \quad |b_1| < |a_1| + d, \quad |b_1| < A, .., |b_\nu| < A,$$

$$u_1 + \cdots + u_\mu > \frac{1}{\varepsilon} + \nu A, \quad |b_1 + \cdots + b_\nu| < \nu A, \quad s' > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Lehrs. 252. (Vgl. Lehrs. 236.) Es gibt keine Zahl, der $u - v$ dauernd beliebig nahe gebracht wird dadurch, daß man u und v hinreichend nahe bei ∞ annimmt. Vielmehr gibt es, wie auch c und δ gewählt werden, immer u und v derart, daß

$$u > \frac{1}{\delta}, \quad v > \frac{1}{\delta}, \quad u - v = c.$$

Lehrs. 253. Das Produkt wird beliebig genau berechnet, wenn man für die Faktoren hinreichend genaue Werte anwendet.

Bew. für das Produkt ab. — Sind a und b endlich, so wähle man

$$\delta \text{ kleiner als } 1,\ \frac{\varepsilon}{3},\ \left|\frac{\varepsilon}{3a}\right|,\ \left|\frac{\varepsilon}{3b}\right|,$$

a' zwischen $a-\delta$ und $a+\delta$, b' zwischen $b-\delta$ und $b+\delta$. Dann wird

$$a'b' - ab = (a'-a)(b'-b) + a(b'-b) + b(a'-a),$$

$$|a'b' - ab| < \varepsilon.$$

Sind beide Faktoren ∞, so wähle man δ kleiner als 1 und ε, $a' > 1:\delta$, $b' > 1:\delta$. Dann wird $a'b' > 1:\varepsilon$.

Ist $a = \infty$, b endlich, etwa positiv, so wähle man B zwischen 0 und b, δ kleiner als $b - B$ und εB, b' zwischen $b-\delta$ und $b+\delta$, $a' > 1:\delta$. Dann wird $a'b' > 1:\varepsilon$.

Lehrs. 254. (Vgl. Lehrs. 236.) Es gibt keine Zahl, der das Produkt uv dauernd beliebig nahe gebracht wird dadurch, daß man u | v hinreichend nahe bei 0 | ∞ annimmt. Vielmehr gibt es, wie auch c und δ gewählt werden, Zahlen u | v, die 0 | ∞ mit der Genauigkeit δ darstellen und das Produkt c liefern.

Lehrs. 255. Der Quotient $a:b$ wird beliebig genau berechnet, wenn man für a und b hinreichend genaue Werte anwendet.

Bew. — Da $a:b = a\,(1:b)$, so kann man sich auf den Quotienten $1:b$ beschränken, wo (Lehrs. 249) b weder 0 noch ∞, etwa positiv. Wählt man B zwischen 0 und b, δ kleiner als $b-B$ und εB^2, b' zwischen $b-\delta$ und $b+\delta$, so wird $b' > B$ und

$$\frac{1}{b'} - \frac{1}{b} = \frac{b-b'}{bb'},\quad \left|\frac{1}{b'} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon.$$

Lehrs. 256. (Vgl. Lehrs. 236.) Es gibt keine Zahl, der $u:v$ dauernd beliebig nahe gebracht wird dadurch, daß man u und v hinreichend nahe entweder bei 0 oder bei ∞ annimmt. Vielmehr gibt es, wie auch c und δ (positiv) gewählt werden, Zahlen u und v, die entweder 0 oder ∞ mit der Genauigkeit δ darstellen und den Quotienten c liefern.

Lehrs. 257. Für jede natürliche Zahl n werden die Potenzen a^n und a^{-n} beliebig genau berechnet, wenn man für die Grundzahl einen hinreichend genauen Wert anwendet (Lehrs. 253 und 255). Für $n = 0$ ist a^n von a unabhängig.

Ist a nicht 1, so wird a^∞ durch v^n beliebig genau dargestellt, wenn $a|\infty$ durch $v|n$ hinreichend genau dargestellt werden.

Bew. des zweiten Teiles für $0 < a < 1$. — Wählt man A zwischen a und 1, p so groß, daß $A^p < \varepsilon$, δ kleiner als a, $A - a$ und $1:p$, v zwischen $a - \delta$ und $a + \delta$, $n < 1:\delta$, so wird $0 < v < A$, $n > p$, $v^n < \varepsilon$.

Lehrs. 258. Es gibt keine Zahl, der u^n dauernd beliebig nahe gebracht wird dadurch, daß man $u|n$ hinreichend nahe bei $1|\infty$ oder $-1|\infty$ oder $1|-\infty$ oder $-1|-\infty$ annimmt. Vielmehr gibt es, wie auch δ gewählt werde, immer Werte $u|n$, für die $|u - 1| < \delta$, $n > 1:\delta$ und u^n entweder beliebig klein oder 1 oder beliebig groß wird. Die Ergänzung dieses Satzes kann erst nach der Einführung gebrochener Potenzexponenten erfolgen, ebenso die Betrachtung der Fälle, wo $u|n$ den Zahlen $0|0$ oder $\infty|0$ oder $-\infty|0$ genähert werden.

Lehrs. 259. (Vgl. Lehrs. 221.) Wird $1 + a + a^2 + \cdot\cdot + a^n$ mit a_n bezeichnet, so ist für endliche a:

$$a_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad \frac{1}{1-a} = a_n + \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Im Fall abs $a < 1$ wird also $1 : (1 - a)$ für hinreichend große n beliebig genau durch a_n dargestellt.

Lehrs. 260. Werden die in Lehrs. 226 gewählten Bezeichnungen angewendet, so wird A durch den Dezimalbruch d_i mit der Genauigkeit $1 : 10^i$ dargestellt, für hinreichend große i mit beliebiger Genauigkeit (Lehrs. 228). Im Falle des Lehrsatzes 233 wird A auch durch δ_i für hinreichend große i mit beliebiger Genauigkeit dargestellt.

§ 32. Wurzeln.

Lehrs. 261. Ist w eine absolute, n eine natürliche Zahl, $w^n = p$, so gibt es außer w keine absolute Zahl, deren n^{te} Potenz die absolute Zahl p wäre.

Def. 119. Im Gebiet der absoluten Zahlen heißt w die n^{te} Wurzel aus p (für $n = 2$ Quadrat-, für $n = 3$ Kubikwurzel). Man bezeichnet sie mit $\sqrt[n]{p}$ (für $n = 2$ kurz mit $\sqrt{p}$) und nennt in diesem Ausdruck p den Radikanden, n den Exponenten.

Die n^{te} Wurzel aus p berechnen (ausziehen), heißt: p mit n radizieren.

Lehrs. 262. Jede natürliche Zahl n kann Wurzelexponent sein.

Potenzierung und Radizierung mit demselben Exponenten heben sich auf; d. h. es ist, wenn a eine beliebige absolute, b eine mit n radizierbare Zahl bedeutet:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$$

Man nennt deshalb Potenzierung und Radizierung einander entgegengesetzte Rechnungsarten, die Radizierung die Umkehrung der Potenzierung.

Lehrs. 263. Jede absolute Zahl a läßt sich mit 1 radizieren; die Zahlen 0, 1, ∞ lassen sich mit jedem Exponenten radizieren. Es ist:

$$\sqrt[1]{a} = a; \quad \sqrt[n]{0} = 0, \quad \sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[n]{\infty} = \infty.$$

Die Wurzeln aus endlichen Zahlen sind endlich.

Ist $n > 1$, b mit n radizierbar, aber von 0, 1, ∞ verschieden, so ist $\sqrt[n]{b}$ von b verschieden und zwar zwischen 1 und b gelegen.

Sind a und b mit n radizierbar, $a < b$, so ist $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Lehrs. 264. Kann man eine Zahl a mit n radizieren, so kann man sie auch mit jedem Teiler von n radizieren.

Ist a mit m und n $(m < n)$ radizierbar, aber von 0, 1, ∞ verschieden, so ist

$$\sqrt[m]{a} \gtrless \sqrt[n]{a}, \text{ je nachdem } a \gtrless 1.$$

Lehrs. 265. Die Wurzeln aus ganzen Zahlen sind ganze, die aus gebrochenen gebrochene Zahlen (Lehrs. 218).

Eine gebrochene Zahl ist dann und nur dann mit n radizierbar, wenn Zähler und Nenner der reduzierten Form es sind (Lehrs. 195).

Lehrs. 266. Zerlegt man (Lehrs. 191, 195) die ganze Zahl $a > 1$ in Primfaktoren:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot\cdot,$$

wo $p_1, p_2, \cdot\cdot$ voneinander und von 1 verschieden sind, und ist g der größte gemeinschaftliche Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot$, so ist a mit den Teilern von g und nur mit ihnen radizierbar.

Ist b eine gebrochene absolute Zahl, g der höchste Exponent, mit dem Zähler und Nenner der reduzierten Form von b radiziert werden können, so ist b mit den Teilern von g und nur mit ihnen radizierbar.

Jede von 0, 1, ∞ verschiedene absolute Zahl kann nur mit einer endlichen Anzahl von Exponenten radiziert werden.

Kann man eine Zahl mit verschiedenen Exponenten radizieren, so kann man sie auch mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Exponenten radizieren.

Lehrs. 267. Zulässigkeit der Ausdrücke vorausgesetzt, gelten folgende Formeln:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[\nu n]{a^{\nu m}} = \sqrt[n]{a^m},$$

insbesondere

$$\sqrt[\nu]{a^{\nu m}} = a^m, \quad \sqrt[\nu n]{a^\nu} = \sqrt[n]{a}.$$

Ist r das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m und n, $r = \mu m = \nu n$, so wird

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[r]{a}\right)^{\mu + \nu}.$$

Lehrs. 268. Es gibt Zahlen, die sich nur mit 1 radizieren lassen, z. B. die Primzahlen außer 1, oder Zahlen von der Form

$$\frac{2r+1}{2(2s+1)}, \text{ wo } r \text{ und } s \text{ ganz.}$$

Zwischen je zwei absoluten Zahlen liegen solche Zahlen; denn man kann $2s+1$ so groß wählen, daß zwei aufeinanderfolgende Brüche mit dem Nenner $2s+1$ zwischen die gegebenen Zahlen fallen, mithin auch deren arithmetisches Mittel (d. h. die halbe Summe).

Lehrs. 269. Sind positive endliche Zahlen a und ε gegeben, so kann man a zwischen zwei mit n radizierbare positive Zahlen einschließen, deren n^{te} Wurzeln um ε differieren.

Bew. für den Fall, daß a nicht mit n radiziert werden kann. — Wählt man $h > 0$ so, daß $h^n < a$ (Lehrs. 219), so kommen unter den Zahlen

$$(h + \varepsilon)^n,\ (h + 2\varepsilon)^n, \ldots$$

Werte $> a$ vor. Ist $(h + \lambda\varepsilon)^n$ die erste derartige Zahl, so wird

$$\bigl(h + (\lambda - 1)\varepsilon\bigr)^n < a < (h + \lambda\varepsilon)^n.$$

Lehrs. 270. Zwischen je zwei absoluten Zahlen a und b $(a < b)$ gibt es mit n radizierbare Zahlen. Von diesen ist keine die kleinste, keine die größte.

Bew. des ersten Teiles für $n > 1$. — Wegen der Fälle $a = 0$, $b = \infty$ siehe Lehrs. 219. Für die übrigen bezeichnen wir $b - a$ mit d und wählen $g > 0$ so, daß $g^n > a$; hierauf

$$\varepsilon > 0,\ < 1,\ < \frac{d}{n\,(g+1)^{n-1}};$$

endlich h und k so, daß

$$h > 0,\ h + \varepsilon = k,\ h^n < a < k^n.$$

Dann wird (vgl. Lehrs. 221):

$$k^n - h^n = \varepsilon\,(k^{n-1} + k^{n-2}\,h + \cdots + h^{n-1}),$$
$$h < g,\ k < g + 1,\ k^n - h^n < \varepsilon n k^{n-1} < \varepsilon n\,(g+1)^{n-1},$$
$$k^n < h^n + d < a + d,\ a < k^n < b.$$

Lehrs. 271. Man kann $\sqrt[n]{x}$ dauernd beliebig klein $(< \varepsilon)$ machen dadurch, daß man x hinreichend klein $(< \varepsilon^n)$ wählt, was nach Lehrs. 270 möglich ist. Man kann $\sqrt[n]{x}$ dauernd beliebig groß machen dadurch, daß man x hinreichend groß wählt.

Überhaupt wird $\sqrt[n]{a}$ durch $\sqrt[n]{x}$ beliebig genau dargestellt, wenn man a durch x hinreichend genau darstellt.

Bew. für $0 < a < \infty$. — Wählt man $\eta > 0,\ < \varepsilon,\ < \sqrt[n]{a}$, so daß $\sqrt[n]{a} - \eta > 0$, und setzt

$$\bigl(\sqrt[n]{a} - \eta\bigr)^n = u,\ \bigl(\sqrt[n]{a} + \eta\bigr)^n = v,$$

so wird $0 < u < a < v$. Wählt man dann $\delta > 0,\ < a - u,\ < v - a$, so wird $0 < u < a - \delta < a < a + \delta < v$. Wählt man endlich die mit n radizierbare Zahl x zwischen $a - \delta$ und $a + \delta$, also zwischen u und v, so wird

$$\sqrt[n]{a} - \varepsilon < \sqrt[n]{a} - \eta < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{a} + \eta < \sqrt[n]{a} + \varepsilon.$$

§ 33. Unendliche Mengen.

Lehrs. 272. Ist D Gemeinname von Dingen, deren Anzahl endlich ist, so kann ein und nur ein Ding M, das die (eigentliche) Menge der D ist, angegeben werden. Dann ist die Aussage „D_0 ist ein D“ gleichbedeutend mit der Aussage „D_0 ist Stück von M“.

Ist D Gemeinname unendlich vieler Dinge, so gibt es im bisherigen Sinn kein Ding M von der Art, daß die Aussage „D_0 ist ein D“ gleichbedeutend wäre mit der Aussage „D_0 ist Stück von M“.

Def. 120. Auch wenn D Gemeinname unendlich vieler Dinge ist, wird statt „D_0 ist ein D“ gesagt „D_0 ist Stück des Dinges M“ und M eine Menge, die Menge der D genannt. Man spricht auch von der Mannigfaltigkeit, dem Inbegriff, der Gesamtheit, dem Gebiet, Bereich der Dinge D. Die Menge heißt endlich oder unendlich, je nachdem die Anzahl der Stücke endlich oder unendlich ist.

Lehrs. 273. Zwischen unendlichen Mengen schließen (Lehrs. 235) totale, exzessive, defektive Zuordnung einander nicht aus, sind daher die Begriffe ebenbürtig, stärker, schwächer nicht anwendbar. Dagegen ist jede endliche Menge schwächer als jede unendliche Menge.

Nur Dinge in dem vor Def. 120 festgehaltenen Sinn können Stücke einer unendlichen Menge sein, also auch der nunmehr möglichen „Menge aller Dinge“. Die Menge aller Dinge ist die einzige, die nicht „erweitert“ werden kann.

Hiervon und von Lehrs. 72 abgesehen gilt § 9 und nur dieser auch für unendliche Mengen.

Im übrigen gilt auch nach obiger Erweiterung des Begriffes Ding alles der Definition 120 Vorangehende, Lehrs. 272 Abs. 2 jedoch nur für den Fall, daß nicht alle D Dinge in dem bis dahin festgehaltenen Sinn sind.

Def. 121. Auch auf diesen Fall wird nunmehr Def. 120 ausgedehnt und auf jeder erreichten Stufe ebenso verfahren.

Lehrs. 274. Keine Menge ist Stück von sich selbst.

Es gibt auf jeder Stufe unendlich viele unendliche Mengen.

Begriffe wie „Menge aller Dinge“, „Menge aller Mengen“ ändern ihre Bedeutung von Stufe zu Stufe.

Def. 122. Soll x jedes beliebige Stück einer Menge M bedeuten können, aber nicht verschiedene gleichzeitig, so sagt man: x (eigentlich die Bedeutung von x) ist veränderlich im Gebiet M. Die Stücke der Menge M heißen Werte von x (eigentlich Werte des Namens x).

Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, kann statt „Wert von x“ kurz x gesagt, also x auch als Gemeinname benutzt werden.

Solange a dasselbe Ding bedeutet, sagt man: a (eigentlich die Bedeutung von a) ist konstant.

§ 34. Zahlenmengen.

Def. 123. Es sei M die Menge gewisser Zahlen x. Gibt es eine endliche Zahl (mithin unendlich viele), die von den x nicht überschritten wird, so heiße M oben endlich, anderenfalls oben unendlich. Gibt es eine endliche Zahl (mithin unendlich viele), unter die die x nicht sinken, so heiße M unten endlich, anderenfalls unten unendlich.

Ist M oben endlich, und ist unter den von keinem x überschrittenen Zahlen eine die kleinste, so heißt sie die obere Schranke von M, die obere Schranke der x. Ist M oben unendlich, so heißt ∞ die obere Schranke von M. Entsprechend wird untere Schranke definiert.

Bem. — Es gibt keine allgemeine Vorschrift für die Entscheidung, ob eine Zahlenmenge oben endlich, unten endlich ist; ob sie eine obere, eine untere Schranke besitzt, eine größte, eine kleinste Zahl (ein Maximum, ein Minimum) enthält; ob eine Zahl alle Zahlen der Menge übertrifft, ob sie obere Schranke ist usw.; ob zwei Zahlenmengen zusammenfallen.

Lehrs. 275. In jeder Nähe der oberen Schranke liegt mindestens ein (nicht notwendig von ihr verschiedenes) x. Unter den von den x nicht überschrittenen Zahlen ist die obere Schranke die einzige solche Zahl.

Gibt es unter den x ein größtes (wie stets im Fall einer endlichen Menge), so ist dieses obere Schranke. Ist die obere

Schranke selbst ein x, so ist sie Maximum; anderenfalls ist sie größte Zahl in der um sie erweiterten Menge.

Entsprechendes gilt von der unteren Schranke.

Def. 124. Eine Zahlenmenge heiße oben geschlossen oder oben offen, je nachdem sie ein Maximum besitzt oder nicht. Eine oben offene Zahlenmenge heiße oben schließbar oder oben nicht schließbar, je nachdem sie eine obere Schranke hat oder nicht.

Das Entsprechende gelte für Minimum und untere Schranke.

Lehrs. 276. Es sei $0 < a < \infty$, n eine natürliche Zahl, x Gemeinname der positiven Zahlen, deren n^{te} Potenz kleiner als a ist. Haben alsdann die x eine obere Schranke, so ist a ihre n^{te} Potenz (Lehrs. 270).

Die oben offene Menge der x ist daher oben schließbar oder nicht, je nachdem a mit n radizierbar ist oder nicht.

Entsprechendes gilt für die positiven Zahlen, deren n^{te} Potenz größer als a ist.

Def. 125. Eine Zahlenmenge heiße eine Schicht, wenn jede zwischen Zahlen der Menge eingeschlossene Zahl zur Menge gehört.

Bem. — Es gibt keine allgemeine Vorschrift für die Entscheidung, ob zwischen zwei Zahlen, zwischen zwei Zahlen der Menge eine Zahl der Menge liegt, ob die Menge eine Schicht ist; ob in jeder Nähe einer Zahl eine von ihr verschiedene Zahl der Menge liegt; ob die Schicht eine obere Schranke, eine untere Schranke, ein Maximum, ein Minimum besitzt; ob eine Zahl alle Zahlen der Schicht übertrifft usw.; ob zwei Schichten zusammenfallen.

Lehrs. 277. Die Schicht ist eine unendliche Menge.

Gehört eine Zahl zu einer Schicht, so liegen in jeder Nähe von ihr andere Zahlen der Schicht.

Wenn eine Zahl nicht zur Schicht gehört, aber in jeder Nähe von ihr Zahlen der Schicht liegen, so ist sie eine Schranke der Schicht.

Wenn zwei Schichten sich nur um eine Zahl unterscheiden, so ist diese für beide Schichten untere Schranke oder obere Schranke.

Lehrs. 278. Die zwischen zwei Zahlen eingeschlossenen Zahlen bilden eine Schicht; jede Schranke darf hinzutreten. Eine Schicht bilden also: alle Zahlen, alle endlichen Zahlen usw.

Hat eine Schicht Schranken, so enthält sie alle zwischen den Schranken eingeschlossenen Zahlen.

Def. 126. Eine oben endliche Schicht heiße Grundschicht, wenn sie unten und oben offen ist und die untere Schranke 0 hat.

Die Grundschicht heiße rational oder irrational, je nachdem sie oben schließbar ist oder nicht. Ist sie oben durch eine gewisse Zahl schließbar, so nennen wir Schicht und Zahl einander zugeordnet.

Bem. — Es gibt keine allgemeine Vorschrift für die Entscheidung, ob eine Schicht eine Grundschicht ist, ob eine Grundschicht rational ist, ob zwei Grundschichten zusammenfallen, ob eine Grundschicht Teil einer anderen ist.

Von jetzt an wird auf das Fehlen von Vorschriften zur Entscheidung gewisser Fragen nicht mehr besonders hingewiesen werden.

Lehrs. 279. Die Grundschicht enthält nur positive Zahlen. Enthält sie eine gewisse Zahl, so enthält sie auch jede kleinere positive.

Die positiven endlichen Zahlen, die nicht zur Grundschicht A gehören, unter Ausschluß der etwaigen oberen Schranke von A, bilden eine unten offene Schicht A', die „Oberschicht“ zu A.

Jede Zahl aus A' ist größer als jede aus A. Gehört eine Zahl zu A', so gehört dazu auch jede größere endliche. A' ist unten schließbar oder nicht, je nachdem A rational oder irrational ist.

Lehrs. 280. Ist $0 < a < \infty$, so bilden die positiven Zahlen, deren n^{te} Potenz unter a liegt, eine Grundschicht. Diese ist rational oder irrational, je nachdem a mit n radiziert werden kann oder nicht. Die Oberschicht dazu bilden die positiven Zahlen, deren n^{te} Potenz über a liegt.

Lehrs. 281. Wird $\delta > 0$ beliebig gewählt, so kann man r in A so wählen, daß $r + \delta$ zu A' gehört.

Lehrs. 282. Sind A, B ungleiche Grundschichten, d. h. gehört etwa eine Zahl von B nicht zu A, so ist A ein Teil von B, A kleiner als B, geschrieben: $A < B$.

Die beiden Grundschichten unterscheiden sich nicht nur um eine Zahl (Lehrs. 277), sondern um unendlichviele.

Lehrs. 283. Von zwei ungleichen Grundschichten ist die eine die kleinere, die andere die größere. Ist $A < B$, $B < C$, so ist $A < C$. Zu jeder Grundschicht gibt es (rationale und irrationale) größere und kleinere. Zwischen je zwei Grundschichten liegen (rationale und irrationale) Grundschichten.

§ 35. Irrationalzahlen.

Lehrs. 284. Es sei S_0 eine Grundschicht, S_1 ihre Oberschicht, p_0 irgend eine Zahl aus S_0, p_1 eine aus S_1. Ist S_0 rational, so gibt es eine (und nur eine) Zahl s derart, daß durchweg $p_0 < s < p_1$. Ist S_0 irrational, so gibt es keine derartige Zahl.

Def. 127. Auch wenn S_0 irrational ist, nennt man jedes p_0 kleiner als s, jedes p_1 größer als s, indem man ein Zeichen s einführt, als wäre es Eigenname eines Dinges und zwar einer Zahl. Man nennt dieses Ding eine Zahl, die der Grundschicht S_0 zugeordnete Zahl. Man nennt s eine irrationale Zahl und zwar eine absolute oder positive. Diese Zahlen werden zu den endlichen und zwar den gebrochenen gerechnet.

Lehrs. 285. Sind a und b endliche positive Zahlen, G_a und G_b die zugeordneten Grundschichten, etwa $G_a < G_b$, so ist, wenn wenigstens eine der Zahlen rational ist, $a < b$.

Def. 128. Auch wenn beide Zahlen irrational sind, heißt a kleiner als b.

Jede positive Irrationalzahl heißt größer als 0, kleiner als ∞.

Lehrs. 286. Im Gebiet der absoluten Zahlen gelten folgende Sätze:

Von zwei ungleichen Zahlen ist die eine die kleinere, die andere die größere.

Ist $a < b$, $b < c$, so ist $a < c$.

Zwischen je zwei Zahlen liegen (rationale und irrationale) Zahlen.

Zu jeder rationalen Zahl $\delta > 0$ gibt es rationale Zahlen p, q derart, daß $p < a < q$ und $q - p < \delta$.

Bemerkung.

Zum Irrationalen wurde man zuerst in der Geometrie geführt, bei der Vergleichung der Diagonale des Quadrats mit der Seite.

Nimmt man als Seite die Längeneinheit, etwa den Meter, so kann man von der Diagonale nicht mittelst einer rationalen Zahl sagen, daß sie a Meter enthält, weil $a^2 = 2$ sein müßte. Nun bilden die positiven rationalen Zahlen p, deren Quadrat kleiner als 2 ist, eine Grundschicht, die rationalen endlichen Zahlen q, deren Quadrat größer als 2 ist, ihre Oberschicht. Kann man dann p und q Meter auf der Diagonale OA von O aus in der Richtung OA bis P, Q auftragen, so ist durchweg $OP < OA < OQ$. Mit Hilfe der durch Def. 127 der Grundschicht zugeordneten Zahl a drückt man dies dadurch aus, daß man sagt: OA beträgt a Meter.

Es bleibt dahingestellt, ob jeder Irrationalzahl eine Aufgabe außerhalb der Analysis entspricht.

§ 36. Rechnen im erweiterten Gebiet der absoluten Zahlen.

Lehrs. 287. Es seien die Zahlen a, b endlich und von 0 verschieden, x eine Veränderliche in der Grundschicht G_a, y in G_b, $x + y = u$. Dann bilden die Werte von u eine Grundschicht G_s, die größer ist als G_a und G_b.

Sind a und b rational, so ist auch s rational, gleich $a + b$.

Bew. — Betrachtet man neben einem Wert von u eine kleinere rationale Zahl u_1 und bezeichnet $xu_1 : u$ mit x_1, $yu_1 : u$ mit y_1, so ist

$$x_1 < x < a, \; y_1 < y < b, \; u_1 = x_1 + y_1,$$

d. h. u_1 ein Wert von u, usw.

Sind a und b rational, $a + b = \sigma$, so ist $\sigma > u$, aber

$$\sigma - u = (a - x) + (b - y)$$

beliebig kleiner Werte fähig, folglich σ obere Schranke von G_s.

Def. 129. Auch wenn nicht a und b rational sind, heißt s ihre Summe. Als Summe $a + 0$ oder $0 + a$ gilt wieder a, als Summe $a + \infty$ oder $\infty + a$ wieder ∞.

Lehrs. 288. Für alle absoluten Zahlen ist $a + b + c = a + (b + c)$.

Bew. für den Fall, daß kein Addend 0 oder ∞ ist. — Sind x, y, z veränderlich in G_a, G_b, G_c, so bilden die Werte von $x + y + z$, d. i. von $x + (y + z)$, sowohl eine Grundschicht G_{a+b+c} als auch $G_{a+(b+c)}$.

Lehrs. 289. Ist a endlich, $c > b$, so ist $a + c > a + b$.

Bew. für den Fall, daß kein Addend 0 oder ∞ ist. — Wählt man z_0 und z_1 rational so, daß $b < z_0 < z_1 < c$, dann $\delta = z_1 - z_0$ und x_1 aus G_a so, daß $x_1 + \delta > a$, so wird

$$x_1 + z_1 < a + c,\; x_1 + z_1 = x_1 + \delta + z_0 > a + b.$$

Lehrs. 290. Ist $a > b$, oder $a = b$ aber endlich, so gibt es ein und nur ein c derart, daß $a = b + c$.

Bew. für $0 < b < a < \infty$. — Wir führen rationale Veränderliche so ein, daß

$$0 < y < b,\; b < x < a,\; b < \xi < x,\; b < x_0 < x,$$

und bilden $x - \xi = z$, $x - x_0 = \delta$ und die von z durchlaufene Grundschicht G_c. Dann ist

$$y + z < \xi + z < a, \text{ mithin } b + c < a,$$

weiter $y < x_0$, $y + \delta < x$. Wählt man also y so, daß $y + \delta > b$, so darf man $y + \delta$ mit ξ bezeichnen und erhält:

$$x_0 = x - (\xi - y) = y + z, \text{ mithin } a < b + c.$$

Def. 130. Auch wenn nicht a und b rational sind, heißt c die Differenz von a und b.

Lehrs. 291. Es seien die Zahlen a, b endlich und von 0 verschieden, x eine Veränderliche in der Grundschicht G_a, y in G_b, $xy = u$. Dann bilden die Werte von u eine Grundschicht G_s.

Sind a und b rational, so ist auch s rational, gleich ab.

Bew. — Betrachtet man neben einem Wert von a eine kleinere rationale Zahl a_1 und bezeichnet $xa_1 : a$ mit x_1, so wird $x_1 < x$, $u_1 < x_1 y$, usw.

Sind a und b rational, $ab = \sigma$, so ist $\sigma > u$, aber $\sigma - u$ beliebig kleiner Werte fähig, usw.

Def. 131. Auch wenn nicht a und b rational sind, heißt s ihr Produkt. Als Produkt $a \cdot 0$ oder $0 \cdot a$ gilt wieder 0, als Produkt $a \cdot \infty$ oder $\infty \cdot a$ wieder ∞.

Lehrs. 292. Solange nicht 0 und ∞ nebeneinander in einem Produkt auftreten, ist

$$abc = a(bc),\ (a+b)c = ac + bc.$$

Bew. der zweiten Formel für endliche von 0 verschiedene a, b, c. — Führt man rationale Veränderliche so ein, daß

$$0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c,\ 0 < z_1 < c,$$
$$0 < p < (a+b)c,\ 0 < q < ac + bc,$$

dann ist jedes p ein q, nämlich ein Wert von

$$(x+y)z, \text{ d. i. } xz + yz,$$

jedes q ein p, nämlich ein Wert von

$$xz + yz_1 = \left(x + y\frac{z_1}{z}\right)z = \left(x\frac{z}{z_1} + y\right)z_1.$$

Lehrs. 293. Für jedes absolute a ist $1 \cdot a = a$.

Bew. für $0 < a < \infty$. — Führt man rationale Veränderliche so ein, daß

$$0 < e < 1,\ 0 < x < a,\ x < \xi < a,$$

dann ist

$$ex < x < a,\ x = \frac{x}{\xi}\xi < 1 \cdot a.$$

Lehrs. 294. Für $c > b$, $0 < a < \infty$ ist $ac > ab$.

Lehrs. 295. Auch zu jeder irrationalen positiven Zahl b gibt es eine „reziproke" c.

Bew. — Wählt man δ rational zwischen 0 und 1 und führt durch die Bedingungen

$$0 < y < b,\ b < \eta < \infty,\ z = \frac{1}{\eta},\ 0 < y_1 < b < y_1 + \delta y$$

rationale Veränderliche, dann die von z durchlaufene Grundschicht G_c ein, so wird $yz < 1$, folglich $bc \leqq 1$, ferner $y_1 + \delta y$ ein η, wofür

$$y_1 = \eta - \delta y > \eta(1 - \delta),\ y_1 z > 1 - \delta,\ bc \geqq 1.$$

Def. 132. Das Produkt ac heißt der Quotient von a durch b. Als Quotient $a : 0$ für $a > 0$ gilt wieder ∞, als Quotient $a : \infty$ für endliche a wieder 0.

Def. 133. Für irrationale Grundzahlen wird die Potenz mit ganzem Exponenten eingeführt wie für rationale.

Lehrs. 296. Ist $0 < a < \infty$, n eine natürliche Zahl, so bilden die positiven rationalen Zahlen, deren n^{te} Potenz unter a liegt, eine Grundschicht G_b. Es ist $b^n = a$ (Lehrs. 280).

Def. 134. Auch wenn b nicht rational ist, heißt es die n^{te} Wurzel aus a.

Lehrs. 297. Im Gebiet der absoluten Zahlen gibt es nunmehr zu jeder Zahl eine und nur eine n^{te} Wurzel.

Die n^{te} Wurzel aus einer ganzen Zahl ist ganz oder irrational, die aus einer rational gebrochenen Zahl entweder rational gebrochen oder irrational, die aus einer irrationalen Zahl stets irrational.

§ 37. Negative Irrationalzahlen.

Lehrs. 298. Ist die positive Zahl a rational, x rational veränderlich, so gibt es eine und nur eine Zahl $a' = -a$ derart, daß die Aussagen $x < a$ und $-x > a'$ gleichbedeutend sind.

Ist a dagegen irrational, so gibt es keine derartige Zahl.

Def. 135. Auch wenn die positive Zahl a irrational ist, wird statt $x < a$ auch gesagt: $-x > a'$, indem ein Zeichen a' eingeführt wird, als wäre es Eigenname eines Dinges und zwar einer Zahl. Man bezeichnet dieses Ding mit $-a$ und nennt es eine negative irrationale Zahl.*)

Lehrs. 299. Die Paragraphen 30 und 31 können übertragen werden, für absolute Zahlen auch die Lehrsätze 219, 220, 261 bis 264, 267, 271 und Def. 119.

Lehrs. 300. Ist $0 < a < \infty$, so liegt $\sqrt[n]{a}$ für hinreichend große n beliebig nahe bei 1.

Bew. für $a > 1$. — Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so kann man $\varrho > 0$ so wählen, daß für $n > \varrho$

$$(1 + \varepsilon)^n > a, \text{ mithin } 1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon.$$

---

*) Variieren x und y nach Annahme einer endlichen Zahl a rational so, daß $x < a < y$, so durchläuft x eine unten unendliche, oben offene Schicht M, y eine unten offene, oben unendliche Schicht N. Das Paar MN bestimmt einen Dedekindschen Zahlenschnitt, der, wenn a irrational ist, zur Definition von a dient.

Lehrs. 301. Jede Zahl kann durch rationale Zahlen, insbesondere durch endliche Dezimalbrüche beliebig genau dargestellt werden.

Lehrs. 302. Für ungerades m gibt es zu jeder Zahl eine und nur eine, deren m^{te} Potenz sie ist. Zu der negativen Zahl $-a$ gehört $b = -\sqrt[m]{a}$.

Für gerades n gibt es zu jeder positiven Zahl a zwei Zahlen b' und b'', deren n^{te} Potenz $= a$. Es ist $b'' = -b'$.

Für gerades n und positives a gibt es keine Zahl, deren n^{te} Potenz $= -a$.

Def. 136. Man nennt b die m^{te} Wurzel aus $-a$, b' und b'' die n^{ten} Wurzeln aus a. Dadurch verliert $\sqrt[n]{a}$ die „Eindeutigkeit“. Wo kein Mißverständnis zu erwarten ist, wird es auch in dem früheren Sinne gebraucht.

Lehrs. 303. Die Summe oder Differenz aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist irrational, die aus zwei irrationalen Zahlen bald rational, bald irrational.

Das Produkt oder der Quotient aus einer endlichen, von 0 verschiedenen, rationalen Zahl und einer irrationalen ist irrational. Das Produkt oder der Quotient aus zwei irrationalen Zahlen ist bald rational, bald irrational.

Die n^{te} Potenz einer rationalen Zahl ist rational, die einer irrationalen für $n > 1$ bald rational, bald irrational.

Diese Sätze bleiben gültig, wenn man sich auf absolute Zahlen beschränkt.

Def. 137. Bisher wurde $\pm\infty$ geschrieben, um die Fälle $+\infty$ und $-\infty$ zusammenzufassen. In anderem Sinn wird es eingeführt durch die Bestimmung, daß statt „$\frac{1}{v}$ stellt die 0 mit der Genauigkeit δ dar“ auch gesagt wird „v stellt $\pm\infty$ (unbestimmtes Unendlich) mit der Genauigkeit δ dar“, gleichviel ob nur positive oder nur negative oder beiderlei Werte auftreten. Man bezeichnet das unbestimmte Unendlich kurz mit ∞, was bisher nur das absolute oder positive Unendlich bedeutete.

Hiermit ist das Gebiet der „reellen“ Zahlen abgeschlossen. Doch wird, wenn von „allen reellen Zahlen“ die Rede ist, in der Regel entweder das unbestimmte Unendlich oder das positive und das negative ausgenommen.

Auf das unbestimmte Unendlich sind die Begriffe größer, kleiner, positiv, negativ nicht zu übertragen. Als Absolutwert gilt das absolute Unendlich. Ferner setzt man für das unbestimmte Unendlich, wenn a endlich, $b \neq 0$:

$$a + \infty = \infty + a = a - \infty = \infty - a = \infty,$$
$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty,\ \frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{a} = \infty,\ \frac{b}{0} = \infty.$$

Als reziproke Zahl zu 0 gilt jetzt ∞, und umgekehrt.

Als Exponent ist das unbestimmte Unendlich unzulässig.

§ 38. Mengen in dem erweiterten Gebiet.

Lehrs. 304. Auch jetzt bleibt § 33 bestehen, ferner bei Ausschließung des unbestimmten Unendlich Def. 123 und Lehrs. 275.

Lehrs. 305. Jede Zahlenmenge, die das unbestimmte Unendlich nicht enthält, hat eine obere und eine untere Schranke.

Bew. für die obere Schranke einer oben endlichen Menge, die positive Zahlen enthält. — Die positiven rationalen Zahlen, die von einer Zahl der Menge überschritten werden können, bilden eine Grundschicht. Die dieser zugeordnete Zahl ist die obere Schranke für sie und für jene Menge.

Def. 138. Eine Zahlenmenge, die das unbestimmte Unendlich nicht enthält, heißt stetig, wenn jede zwischen Zahlen der Menge eingeschlossene Zahl der Menge angehört, sonst unstetig. Auf andere Zahlenmengen werden diese Begriffe zunächst nicht angewendet.

Eine Veränderliche heißt stetig, wenn ihre Werte eine stetige Zahlenmenge bilden, sonst unstetig.

Lehrs. 306. Sind α und β beliebig, $\alpha < \beta$, so werden durch die Bedingungen

$$\alpha \leqq p \leqq \beta,\ \alpha \leqq q < \beta,\ \alpha < r \leqq \beta,\ \alpha < s < \beta$$

stetige Veränderliche definiert.

Ist α die untere, β die obere Schranke einer stetigen Zahlenmenge, so enthält diese alle Zahlen zwischen α und β.

Def. 139. Die von p durchlaufene Zahlenmenge heiße eine Zahlenstrecke, die Strecke von α bis β.

Ist α die untere, β die obere Schranke einer Menge, so heiße die Strecke von α bis β die Strecke der Menge.

Lehrs. 307. Zur Strecke der Menge gehören alle Zahlen der Menge. Für eine andere Strecke gilt dies nur, wenn sie jene umfaßt.

Def. 140. Enthält jede Teilstrecke der Strecke S eine Zahl der Menge M, so heißt M überalldicht auf S.

Lehrs. 308. Auf jeder Strecke liegen die rationalen und die irrationalen Zahlen überalldicht. Von rationalen Zahlen liegen auf jeder Strecke absoluter Zahlen überalldicht: die überhaupt mit einem Exponenten > 1 rational radizierbaren, die mit einem gewissen Exponenten rational radizierbaren, die mit einem gewissen Exponenten > 1 rational nicht radizierbaren, die mit keinem Exponenten > 1 rational radizierbaren.

§ 39. Gebrochene Potenzexponenten.

Läßt man als Radikanden und Wurzeln nur absolute Zahlen zu, so gilt:

Lehrs. 309. Ist $\varrho : \sigma$ $(\sigma > 0)$ die reduzierte, $r : s$ $(s > 0)$ eine beliebige Bruchform der rationalen Zahl k, so ist, sofern 0^0, ∞^0, 1^∞ vermieden werden,

$$\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[\sigma]{a^\varrho}$$

nur von a und k abhängig und $= a^k$ für ganzes k.

Def. 141. Auch für gebrochenes k heißt $\sqrt[\sigma]{a^\varrho}$ die k^{te} Potenz von a.

Lehrs. 310. Wählt man m, n, p, q rational, $p > 0$, q endlich, so ist:

$$\sqrt[s]{a} = a^{\frac{1}{s}},\ \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}},\ 1^q = 1,\ 0^p = 0,\ \infty^p = \infty,$$

$$(ab)^n = a^n b^n,\ a^m a^n = a^{m+n},\ (a^m)^n = a^{mn},$$

$$a^p > 1 \text{ für } a > 1.$$

Mithin behält die Potenz ihre formalen und die in den Lehrsätzen 219 und 220 ausgesprochenen Eigenschaften.

Lehrs. 311. Bei festem n wird a^n beliebig genau dargestellt, wenn man a hinreichend genau darstellt (vgl. Lehrs. 271).

Bei festem a zwischen 0 und ∞ liegt a^n für hinreichend kleine n beliebig nahe bei 1 (vgl. Lehrs. 300).

Sofern a^n eine Bedeutung hat, wird es beliebig genau dargestellt, wenn man n durch m hinreichend genau darstellt. Denn, wenn a und n endlich, so ist:

$$a^m - a^n = a^n\,(a^{m-n} - 1).$$

Lehrs. 312 (Ergänzung zu Lehrs. 258). Bei jeder Wahl der positiven endlichen Zahlen c und δ gibt es Zahlen u n, die $1 \mid \infty$ oder $0\;0$ oder $\infty \mid 0$ mit der Genauigkeit δ darstellen und $u^n = c$ machen.

Bew. für $c > 1$. — Wählt man r zwischen 0 und δ so, daß c^r zwischen 1 und $1 + \delta$ fällt, dann ϱ zwischen 0 und r, endlich $n = 1 : \varrho$, $u = c^\varrho$, so wird

$$1 < u < c^r < 1 + \delta,\ n > \frac{1}{\delta},\ u^n = c.$$

Wählt man dagegen $r > 0$ so, daß $c^r > 1 : \delta$, dann $\varrho > r$ und $> 1 : \delta$, endlich $n = -1 : \varrho$, $u = c^{-\varrho}$, so wird

$$0 < u < c^{-r} < \delta, \quad n < \delta, \quad u^n = c.$$

Lehrs. 313. Es sei die absolute Zahl a von 0, 1, ∞ verschieden, x rational und endlich, p rational veränderlich zwischen $-\infty$ und x, dann ist a^x obere oder untere Schranke der Werte von a^p, je nachdem $a \gtrless 1$.

Def. 142. Auch wenn x irrational ist, heißt für $a > 1$ die obere, für $a < 1$ die untere Schranke der Werte von a^p die x^{te} Potenz von a; unter 1^x versteht man 1, unter 0^x, ∞^x entweder 0, ∞ oder ∞, 0, je nachdem x positiv oder negativ.

Für beliebige x heiße a^x die Exponentiale von x für die Grundzahl a.

Lehrs. 314. Die Potenz behält auch jetzt ihre formalen und die in den Lehrsätzen 219, 220 und 311 ausgesprochenen Eigenschaften.

Bew. — Man kann zuerst zeigen, daß für $y > x$:

$$a^y \gtrless a^x, \text{ je nachdem } a \gtrless 1,$$

und daß mithin a^x beliebig genau dargestellt wird, wenn man x hinreichend genau darstellt.

Es seien nun a, b, m, n endlich. Variiert r rational zwischen $-\infty$ und n, so werden

$$(ab)^n \text{ und } a^n b^n \text{ durch } (ab)^r = a^r b^r$$

beliebig genau dargestellt, wenn man n durch r hinreichend genau darstellt; folglich ist (Lehrs. 250):

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Entsprechend beweist man die Formeln:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

zunächst für rationale m, dann für beliebige. Usw.

Lehrs. 315. Sind α, β, n, ε endlich, α, β, ε positiv, $\alpha < \beta$, so kann man die endliche Zahl $\delta > 0$ so wählen, daß

$$|x_1^n - x_0^n| < \varepsilon \text{ für } |x_1 - x_0| < \delta,$$

solange x_0 und x_1 $(x_0 < x_1)$ auf der Strecke von α bis β bleiben.

Bew. — Wählt man die positive ganze Zahl $h > |n|$, dann $p > \alpha^{n-h}$ und β^{h-1}, mithin größer als alle Werte von x^{n-h} und x^{h-1} für $\alpha < x \leqq \beta$, endlich $\delta = \varepsilon : hp^2$, so kommt für $n \geqq 0$:

$$|x_1^n - x_0^n| = x_0^n\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n - 1\right) < x_0^n\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^h - 1\right),$$

$$x_0^n\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^h - 1\right) = x_0^{n-h}\left(x_1^{h-1} + \cdots + x_0^{h-1}\right)(x_1 - x_0),$$

$$|x_1^n - x_0^n| < h x_0^{n-h} x_1^{h-1}(x_1 - x_0) < \varepsilon.$$

Für $n < 0$ kommt:

$$|x_1^n - x_0^n| = x_0^n\left(1 - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n\right) < x_0^n\left(1 - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{-h}\right),$$

$$x_0^n\left(1 - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{-h}\right) = x_0^n x_1^{-h}(x_1^h - x_0^h) < x_0^{n-h}(x_1^h - x_0^h) \text{ usw.}$$

Lehrs. 316. Sind a, α, β, ε endlich, a und ε positiv, $\alpha < \beta$, so kann man die endliche Zahl $\delta > 0$ so wählen, daß

$$|a^{x_1} - a^{x_0}| < \varepsilon \text{ für } |x_1 - x_0| < \delta,$$

solange x_0 und x_1 auf der Strecke von α bis β bleiben.

Bew. — Wählt man $g > a^\alpha$, a^β, mithin größer als alle Werte von a^x für $\alpha < x < \beta$, dann δ so, daß $|a^u - 1| < \varepsilon : g$ für $|u| < \delta$, so kommt:

$$|a^{x_1} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x_1 - x_0} - 1| < \varepsilon.$$

Lehrs. 317. Sind a und n endlich, a positiv, so wird a^n beliebig genau dargestellt, wenn man a und n hinreichend genau darstellt. Allgemeiner: Sind $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \varepsilon$ endlich, $\alpha, \beta, \varepsilon$ positiv, $\alpha < \beta$, $\lambda < \mu$, so kann man die endliche Zahl $\delta > 0$ so wählen, daß

$$|x_1^{u_1} - x_0^{u_0}| < \varepsilon \text{ für } |x_1 - x_0| < \delta, \quad |u_1 - u_0| < \delta,$$

solange x_0 und x_1 auf der Strecke von α bis β, u_0 und u_1 auf der von λ bis μ bleiben.

Bew. — Man wähle die positive ganze Zahl $h > |\lambda|$ und $|\mu|$, dann g größer als alle Werte von x^u, p größer als alle Werte von x^{u-h} und x^{h-1} für $\alpha \leq x < \beta$ und $\lambda \leq u < \mu$, endlich $v > 0$ so, daß

$$\alpha^v, \alpha^{-v}, \beta^v, \beta^{-v} \text{ zwischen } 1 - \frac{\varepsilon}{2g} \text{ und } 1 + \frac{\varepsilon}{2g}$$

fallen, mithin

$$|x^u - 1| < \frac{\varepsilon}{2g}, \text{ wenn } |u| < v, \ \alpha < x < \beta.$$

Ist dann

$$0 < \delta < v, \quad \delta < \frac{\varepsilon}{2hp^2},$$

so kommt:

$$|x_1^{u_0}(x_1^{u_1-u_0} - 1)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_1^{u_0} - x_0^{u_0}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|x_1^{u_1} - x_0^{u_0}| = |x_1^{u_0}(x_1^{u_1-u_0} - 1) + x_1^{u_0} - x_0^{u_0}| < \varepsilon.$$

§ 40. Logarithmen.

Lehrs. 318. Sind a und x absolute Zahlen, a von 0, 1, ∞ verschieden, so gibt es eine und nur eine Zahl u, für die $a^u = x$.

Bew. für $a > 1$, $0 < x < \infty$. — Es gibt Zahlen p, q, für die $a^p < x$, $a^q > x$. Bezeichnet man die obere Schranke der p mit u, so ist durchweg $p < u$, $q > u$. Folglich ist a^u nicht von x verschieden.

Def. 143. Man nennt u den Logarithmus von x für die Grundzahl a, geschrieben:

$$u = \overset{a}{\log} x.$$

Die Folgen x u mit festem a bilden das „Logarithmensystem“ mit der Grundzahl a. Man nennt x den Numerus von u in diesem System.

Lehrs. 319. Die Exponentiale und der Logarithmus sind die Umkehrungen voneinander, d. h. es ist

$$a^{\overset{a}{\log} x} = x, \quad \overset{a}{\log}\,(a^x) = x.$$

Bei fester Grundzahl a hat man:

$$\log x_0 < \log x_1,\ \log 0 = -\infty,\ \log\infty = +\infty,\ \text{wenn } a > 1,\ x_0 < x_1,$$

$$\log x_0 > \log x_1,\ \log 0 = +\infty,\ \log\infty = -\infty,\ \text{wenn } a < 1,\ x_0 < x_1,$$

$$\log(xx') = \log x + \log x',\ \log\frac{x}{x'} = \log x - \log x',\ \log(x^n) = n\log x,$$

$$\log\frac{1}{x} = -\log x, \quad \log 1 = 0, \quad \log a = 1,$$

und für verschiedene Grundzahlen:

$$\overset{b}{\log} x = \frac{\overset{a}{\log} x}{\overset{a}{\log} b}.$$

Lehrs. 320. Der Logarithmus wird beliebig genau dargestellt, wenn man den Numerus hinreichend genau darstellt. Allgemeiner, bei Ausschluß des Unendlichen: Sind α, β, ε endliche positive Zahlen, $\alpha < \beta$, so kann man $\delta > 0$ so wählen, daß

$$\left|\overset{a}{\log} x_1 - \overset{a}{\log} x_0\right| < \varepsilon \text{ für } \left|x_1 - x_0\right| < \delta,$$

solange x_0 und x_1 auf der Strecke von α bis β bleiben.

Bew. für $a > 1$. — Wird $\log\alpha$ mit λ, $\log\beta$ mit μ bezeichnet und die ganze Zahl

$$n > 2 \text{ und } > 2\,\frac{\mu - \lambda}{\varepsilon}$$

gewählt, so kann man zwischen λ und μ der Reihe nach λ_1, . ., λ_{n-1} so einschalten, daß durchweg $2\,(\lambda_i - \lambda_{i-1}) < \varepsilon$, wobei $\lambda_0 = \lambda$, $\lambda_n = \mu$. Ist dann

$$a^{\lambda_0} = \alpha_0, \quad a^{\lambda_1} = \alpha_1, \ldots, \text{ also } \alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_n = \beta,$$

und wird für δ die kleinste der Differenzen $\alpha_i - \alpha_{i-1}$ genommen, so liegt zwischen x_0 und x_1 entweder kein α_i oder nur eines, folglich zwischen $\log x_0$ und $\log x_1$ entweder kein λ_i oder nur eines.

Lehrs. 321. Der Logarithmus wird beliebig genau dargestellt, wenn man den Numerus und die Grundzahl hinreichend genau darstellt. Allgemeiner: Sind α, β, r, s, ε endliche Zahlen, $\alpha < \beta$, $\varepsilon > 0$ und entweder $r < s < 1$ oder $1 < r < s$, so kann man $\delta > 0$ so wählen, daß

$$\left|\overset{a_1}{\log} x_1 - \overset{a_0}{\log} x_0\right| < \varepsilon \text{ für } |x_1 - x_0| < \delta, \quad |a_1 - a_0| < \delta,$$

solange x_0 und x_1 auf der Strecke von α bis β, a_0 und a_1 auf der von r bis s bleiben.

Bew. — Sind u_0, u_1, c_0, c_1 die Logarithmen von x_0, x_1, a_0, a_1 für eine Grundzahl b, so wird

$$\overset{a_1}{\log} x_1 - \overset{a_0}{\log} x_0 = \frac{u_1}{c_1} - \frac{u_0}{c_0} = \frac{c_0 u_1 - c_1 u_0}{c_0 c_1},$$

$$c_0 u_1 - c_1 u_0 = (u_1 - u_0)\, c_1 - (c_1 - c_0)\, u_1.$$

Wählt man nun die positiven endlichen Zahlen g, h, δ so, daß

$$\left|\overset{b}{\log} x\right| < g, \text{ wenn } \alpha < x < \beta \text{ oder } r < x < s,$$

$$\left|\overset{b}{\log} x\right| > h, \text{ wenn } r < x \leq s,$$

$$|u_1 - u_0| < \frac{\varepsilon h^2}{2g}, \quad |c_1 - c_0| < \frac{\varepsilon h^2}{2g},$$

so wird $|c_0 u_1 - c_1 u_0| < \varepsilon h^2$, $|c_0 c_1| > h^2$.

§ 41. Kombinatorik.

Lehrs. 322. Enthält eine (uneigentliche) Menge nur gleiche Stücke, so ist die Anzahl der Permutationen der Menge (d. h. ihrer Stücke) 1.

Enthält die (eigentliche oder uneigentliche) Menge M die Dinge A, B, . . in den Häufigkeiten α, β, . ., die Menge M' die Dinge A', B', . . in denselben Häufigkeiten, so entsteht aus jeder Permutation der Menge M (d. h. ihrer Stücke) eine und nur eine Permutation der Menge M', indem man A durch A', B durch B', . . ersetzt. Die (stets endliche) Anzahl der Permutationen ist also für beide Mengen dieselbe.

Insbesondere ist die Anzahl P_n der Permutationen von n verschiedenen Dingen nur von n abhängig. Es ist $P_2 = 2$.

Lehrs. 323. Bedeutet R_i für $i = 1, 2, .., m + 1$ diejenigen Permutationen der ungleichen Dinge $a_1 \,.\,.\, a_m b$ $(m > 1)$, welche b an i^{ter} Stelle enthalten, R_i' die jedesmal aus R_i durch Fortlassen von b entstehende Permutation von $a_1 \,.\,.\, a_m$, so sind die R_1' voneinander verschieden und stellen alle Permutationen von $a_1 \,.\,.\, a_m$ dar, ebenso die R_2' usf. Mithin ist (Lehrs. 160)

die Anzahl P_{m+1} aller Permutationen von $a_1 \ldots a_m b$ gleich $(m+1) P_m$, und schließlich:

$$P_n = n! \text{ (gelesen: } n\text{-Fakultät)},$$

wo $n!$ das Produkt der n ersten natürlichen Zahlen bedeutet.

Versteht man unter 1! und 0! die Zahl 1, so ist $k! = k \cdot (k-1)!$ für jede natürliche Zahl k.

Lehrs. 324. Nennt man die Paarfolge $\alpha | \beta$ aus natürlichen Zahlen eine Inversion, wenn $\alpha > \beta$, so ist keine Teilfolge der Folge $1 | 2 | \cdot \cdot | n$ eine Inversion, während jede andere Permutation dieser Zahlen mindestens eine Inversion enthält. Die Anzahl der Inversionen in einer Permutation wird durch jede Nachbarvertauschung um 1 geändert, folglich (Lehrs. 140) durch jede Paarvertauschung um eine ungerade Zahl. Je nachdem also in einer Permutation von $1 | 2 \cdot \cdot n$ Inversionen in gerader (Permutation erster Klasse, gerade) oder in ungerader (Permutation zweiter Klasse, ungerade) Anzahl vorkommen, gelangt man (Lehrs. 141) zu dieser Permutation von der natürlichen Reihenfolge aus nur durch eine gerade oder nur durch eine ungerade Anzahl von Paarvertauschungen.

Überhaupt gelangt man von jeder Permutation verschiedener Dinge zu der einen Hälfte ihrer Permutationen nur durch gerade, zu der anderen nur durch ungerade Anzahlen von Paarvertauschungen.

Lehrs. 325. Die Menge $b_1 \ldots b_m c_1 \ldots c_k$, in der die b beliebig, die c von den b und voneinander verschieden sind, möge r, die Menge $b_1 \ldots b_m d_1 \ldots d_k$, in der die d von den b verschieden, aber einander gleich sind, s Permutationen zulassen. Dann läßt $b_1 \ldots b_m c_1 \ldots c_k$ s Permutationen zu, die die c in einer bestimmten Reihenfolge enthalten, mithin im ganzen $s \cdot k!$ Permutationen, und es kommt: $s = r : k!$ (auch bei $m = 1$).

Enthält also eine Menge die Dinge $A, B, \ldots$ in den Häufigkeiten $\alpha, \beta, \ldots$, so ist die Anzahl der Permutationen der Menge:

$$\frac{(\alpha + \beta + \cdot \cdot)!}{\alpha! \, \beta! \cdot \cdot}.$$

Lehrs. 326. Für jede absolute ganze Zahl n und für $k = 0, 1, \ldots, n$ ist hiernach $n!$ durch $k! \, (n-k)!$ teilbar. Bezeichnet man den Quotienten mit

$$\binom{n}{k}, \text{ gelesen: } n \text{ über } k,$$

so erhält man:

$$\binom{n}{1} = n \text{ für } n > 0, \ \binom{n}{0} = 1, \ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \text{ für } n > 0, \ k > 0,$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \text{ für } k < n,$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} \text{ für } k < n-1,$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}$$

oder: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k}.$$

Lehrs. 327. (Binomischer Lehrsatz.) Die n^{te} Potenz des „Binoms" $a + b$ ist, wenn n eine absolute ganze Zahl:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$$= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Bew. durch Fortgehen vom Exponenten m zu $m + 1$.

Def. 144. Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen die Binomialkoeffizienten für die n^{te} Potenz (für den Exponenten n), der nullte, erste, . ., n^{te}.

Def. 145. Sind $a_1 \ldots a_n$ verschiedene Dinge, so heißt jede Menge von k Stücken, die Dinge a sind, eine Kombination k^{ten} Grades aus den a, jede Permutation einer solchen Menge eine Variation k^{ten} Grades aus den a. Jedes a heißt eine Kombination oder Variation ersten Grades.

Sind die k Stücke der Menge nicht alle ungleich, so heißt sie eine Kombination mit Wiederholung, sonst eine Kombination ohne Wiederholung (kurz: eine Kombination). Das Entsprechende gilt für die Variationen.

Lehrs. 328. Für die Kombinationen und Variationen ohne Wiederholung ist als Grad höchstens n zulässig, für die mit Wiederholung jede natürliche Zahl.

Die Anzahl der Kombinationen oder Variationen ersten Grades ist n.

Um aus den Variationen i^{ten} Grades ohne Wiederholung die nächsthöheren zu bilden, fügt man jeder jedes der $n - i$ darin nicht vorkommenden a an. Die Anzahl der Variationen k^{ten} Grades ohne Wiederholung aus n Dingen ist demnach

$$n(n-1)\cdots(n-k+1), \text{ d. i. } \frac{n!}{(n-k)!},$$

die der Kombinationen $\binom{n}{k}$.

Die Anzahl der Variationen k^{ten} Grades aus n Dingen bei zugelassener Wiederholung ist n^k. Die der Kombinationen ist

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Denn die Kombinationen $(i+1)^{\text{ten}}$ Grades enthalten entweder a_1 und eine Kombination i^{ten} Grades aus $a_1 \cdots a_n$, oder a_2 und eine Kombination i^{ten} Grades aus $a_2 \cdots a_n$, usf.; ist also der Satz für den Grad i richtig, so ist die Anzahl der Kombinationen $(i+1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\binom{n+i-1}{i} + \binom{n+i-2}{i} + \cdots + \binom{i}{i}, \text{ d. i. } \binom{n+i}{i+1}.$$

Anhang.

Auszüge aus früheren Schriften des Verfassers.

I.

Auszug aus den „Vorlesungen über neuere Geometrie“ Leipzig 1882.

Es erfordert einige Mühe und Wachsamkeit, sich beharrlich Dinge hinwegzudenken, mit denen man vertraut ist, und auf einen Standpunkt zurückzugehen, von dem man sich weit entfernt hat. (Seite 3.)

Die Sätze werden in verschiedener Weise eingeführt. Einige von ihnen werden bewiesen, d. h. es wird gezeigt, wie ihr Inhalt bedingt ist durch andere Sätze; die beim Beweise benutzten Sätze müssen jedesmal vorangehen. Wir stellen nun die Sätze, welche bewiesen werden, als Lehrsätze (Theoreme) den anderen gegenüber, die wir als Grundsätze bezeichnen. Die Lehrsätze werden aus den Grundsätzen deduziert, so daß alles, was zur Begründung der Lehrsätze gehört, ohne Ausnahme sich in den Grundsätzen niedergelegt finden muß. (Seite 4 und 5.)

Einer so trivialen Aussage, wie sie z. B. der dritte Grundsatz enthält, erst eine besondere Fassung zu geben, wird leicht für zwecklos gehalten werden. Aber sie ist in den vorstehenden Beweisen in Anwendung gebracht worden, und wir nehmen uns vor, von allen Beweisgründen ohne Unterschied Rechenschaft abzulegen, auch von den unscheinbarsten. (Seite 6.)

Im Laufe der Entwickelung traten zu den ursprünglich eingeführten geometrischen Begriffen neue hinzu, welche jedoch auf jene zurückzuführen sind. Wir wollen dieselben abgeleitete Begriffe nennen, die anderen Grundbegriffe. Die abgeleiteten Begriffe wurden definiert, wobei allemal die vorhergehenden benutzt wurden, keine anderen; und so oft ein abgeleiteter Begriff zur Anwendung kam, wurde unmittelbar oder mittelbar

auf seine Definition Bezug genommen; ohne eine solche Berufung war die betreffende Beweisführung nicht möglich. Die Grundbegriffe sind nicht definiert worden; keine Erklärung ist imstande, dasjenige Mittel zu ersetzen, welches allein das Verständnis jener einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschließt, nämlich den Hinweis auf geeignete Naturobjekte. Wenn Euklid sagt: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat; eine Linie ist Länge ohne Breite; eine gerade Linie (Strecke) ist diejenige, welche den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt“, so erklärt er die angeführten Begriffe durch Eigenschaften, welche sich zu keiner Verwertung eignen, und welche auch von ihm bei der weiteren Entwickelung nirgends verwertet werden. In der Tat stützt sich keine einzige Stelle auf eine jener Aussagen, durch welche der Leser, der aus den „Elementen“ ohne eine bereits vorher durch wiederholte Beobachtungen ausgebildete Vorstellung von den geometrischen Grundbegriffen überhaupt nichts lernen kann, höchstens an die betreffende Vorstellung erinnert und dazu veranlaßt wird, sie den wissenschaftlichen Anforderungen gemäß einzuschränken oder zu ergänzen. (Seite 16 und 17.)

Die Mathematik stellt Relationen zwischen den mathematischen Begriffen auf, welche den Erfahrungstatsachen entsprechen sollen, aber weitaus in ihrer Mehrzahl der Erfahrung nicht unmittelbar entlehnt, sondern „bewiesen“ werden; die (außer den Definitionen der abgeleiteten Begriffe) zur Beweisführung notwendigen Erkenntnisse bilden selbst einen Teil der aufzustellenden Relationen. Nach Ausscheidung der auf Beweise gestützten Sätze, der Lehrsätze, bleibt eine Gruppe von Sätzen zurück, aus denen alle übrigen sich folgern lassen, die Grundsätze; diese sind unmittelbar auf Beobachtungen gegründet, freilich auf Beobachtungen, welche seit undenklichen Zeiten sich unaufhörlich wiederholt haben, welche klarer erfaßt werden, als die irgend einer andern Art, und mit denen die Menschen deshalb längst so vertraut geworden sind, daß ihr Ursprung in Vergessenheit geraten und Gegenstand des Streites werden konnte. (Seite 17.)

Zwischen den Beweisgründen, welche in der Anwendung früherer Sätze und Definitionen bestehen, und andern irgend-

welcher Natur werden wir nicht versuchen, eine Grenze zu ziehen — was schwerlich gelingen dürfte —, sondern wir werden nur diejenigen Beweise anerkennen, in denen man Schritt für Schritt sich auf vorhergehende Sätze und Definitionen beruft oder berufen kann. Wenn zur Auffassung eines Beweises die entsprechende Figur unentbehrlich ist, so genügt der Beweis nicht den Anforderungen, welche wir an ihn stellen. — Anforderungen, welche erfüllbar sind; bei einem vollkommenen Beweise ist die Figur entbehrlich. Nicht bloß in der von Euklid überlieferten Form tragen zahlreiche Beweise der Geometrie jene Unvollkommenheit an sich, sondern auch nach den vielfachen Umgestaltungen, welche sie im Laufe der Zeit erfahren haben; nur daß bei Euklid die Irrtümer rein zutage treten und nirgends durch Worte verhüllt sind. — Man darf nicht einwenden, daß häufig, ohne Anfertigung der Figur, durch ihre bloße Vorstellung der Zweck erreicht werden kann. Die vorgestellte Figur ist nur zulässig, sofern sie mit einer wirklichen übereinstimmt. Aber selbst wenn irgend eine der Einbildungskraft allein entstammende Figur Berechtigung hätte, so wären wir nicht der Verpflichtung überhoben, von den aus ihr entnommenen Beweismitteln sorgfältig Rechenschaft zu geben. (Seite 45.)

Bei der Aufsuchung neuer Wahrheiten wird man sich unbedenklich aller Mittel bedienen, welche zum Ziele führen können. Anders verhält es sich mit der Prüfung und Darstellung des Gefundenen, welche in der Mathematik nur dann befriedigt, wenn die neue Tatsache als eine Folge der bekannten Tatsachen erscheint. Diese Forderung ist wohl aus der Wahrnehmung entsprungen, wie man in der Mathematik reichlicher als auf irgend einem andern Gebiete die Möglichkeit antrifft, durch Schlußfolgerungen allein, ohne besonderes Experiment, Neues und Richtiges aus Bekanntem zu finden; sie wird um so sicherer von selbst erfüllt, je weiter man sich von den Grundbegriffen entfernt, je ausschließlicher man also mit zusammengesetzten Begriffen umgeht, die wegen ihrer nicht gemeinfaßlichen Bedeutung keine Relationen zulassen, welche sich unbemerkt in eine Schlußfolgerung einschleichen könnten. Wenn nun die Mathematik an die streng deduktive Methode, der sie

gerecht zu werden vermag, sich wirklich bindet, so darf man hierin keinen überflüssigen Zwang erblicken. Der Wert jener Methode besteht darin, daß die ihr entsprechende Auffassung des Beweisverfahrens alle Willkür ausschließt, während bei jeder andern Auffassung die Unanfechtbarkeit der Beweise aufhört, weil der Beurteilung keine scharfe Grenze gezogen werden kann. Die Unanfechtbarkeit der Beweise, durch welche die Lehrsätze auf die Grundsätze zurückgeführt werden, im Verein mit der Evidenz der Grundsätze selbst, welche durch die einfachsten Erfahrungen verbürgt sein sollen, gibt der Mathematik den Charakter höchster Zuverlässigkeit, den man ihr zuzuschreiben pflegt. Um diese Eigenschaften überall zu erzielen, wird man sich allerdings zu mancher Weitläufigkeit genötigt sehen; aber auf der andern Seite werden gerade durch eine präzise Darstellung gewisse Vereinfachungen ermöglicht. Zunächst hat die erhöhte Verwendbarkeit der Beweise sich schon wiederholt als nützlich erwiesen. Sodann — und darauf möchte ich hier das Hauptgewicht legen — erkennt man bei solcher Darstellung die Entbehrlichkeit gewisser Bestandteile, welche gewohnheitsmäßig mit überliefert werden. Die Wissenschaft schöpft einen Teil ihres Stoffes unmittelbar aus der Sprache des täglichen Lebens. Aus dieser Quelle sind Ausdrucksweisen und Anschauungen, mit denen man wissenschaftliche Sätze nicht formulieren sollte, auch in die Mathematik hineingelangt und dort die Veranlassung geworden, daß gewisse Partien unklar erscheinen, und daß sich zahlreiche Diskussionen, namentlich über geometrische Dinge erhoben haben. Welche Rolle die einzelnen Begriffe und Relationen in dem Systeme spielen, wieweit sie für das Ganze notwendig oder entbehrlich sind, tritt nur bei absolut strenger Darstellung an den Tag. Erst wenn auf solchem Wege die wesentlichen Bestandteile vollständig gesammelt, die überflüssigen aber ausgeschieden sind, wird man für jene Diskussionen, soweit sie nicht dadurch gegenstandslos werden, die richtige Grundlage besitzen. (Seite 99 und 100.)

Bemerkungen.

Seite 20 Z. 3 und 2 v. u. steht E, E' statt P, P'; Seite 26 Z. 14 v. o. AC statt $A'C$, Z. 20 v. o. $A'M$ statt $A'B$. — Am

Schluß von § 2 ist ein Lehrsatz hinzuzufügen; siehe Mathematische Annalen 1897 Band 48 Seite 111.

Seite 33 Z. 13 v. o. steht *ABC* statt *ABS*. — Die Betrachtungen in § 7 und § 8 lassen sich erheblich vereinfachen; siehe Mathematische Annalen 1888 Band 32 Seite 159 f.

Seite 68 Z. 13 v. u. ist das zweite K in k, Seite 71 Z. 14 v. o. das zweite Q in q zu ändern. Hinter Satz d) auf Seite 71 ist ein Lehrsatz hinzuzufügen; siehe Mathematische Annalen 1897 Band 48 Seite 111 f.

Seite 79 Z. 9 v. u. darf der Punkt S' nicht auf der Geraden AS angenommen werden. Seite 81 Z. 13 v. u. steht h_1 statt h. Daß die Punkte h und h_1 Seite 83 Z. 1 f. voneinander verschieden sind, habe ich nachträglich bewiesen: Mathematische Annalen 1897 Band 48 Seite 111 f. Hiernach kann die Stelle in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band III 1 Heft 1 (1907) Seite 77 ergänzt werden.

Seite 116 Z. 21 v. o. steht fgd statt gfd, Seite 119 Z. 14 v. u. A statt α, Seite 124 Z. 1 v. u. $A\alpha$ statt: der $A\alpha$, Seite 134 Z. 3 v. o. $\lambda\mu$ statt $l\mu$, Seite 143 Z. 6 v. o. Punkten statt Ebenen, Seite 152 Z. 10 v. u. $ac\beta$ statt acb, Seite 168 Z. 8 v. o. das zweite $\alpha\beta$ statt $\beta\alpha$, Z. 1 v. u. das erste pr statt pq, Seite 185 Z. 9 v. o. p_2 statt p_1, Z. 11 v. o. p_1 statt p_2.

Siehe auch Mathematische Annalen 1887 Band 30 Seite 127 ff.

II.

Auszug aus der „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung“ Leipzig 1882.

In akademischen Vorlesungen alle Einzelheiten vor Anfängern zu besprechen, ist nicht bloß sehr zeitraubend, sondern auch im allgemeinen von zweifelhaftem Erfolge, da der Lernende erst bei einer gewissen Reife des Urteils die großenteils sehr abstrakten Auseinandersetzungen sich anzueignen und ihre Notwendigkeit einzusehen vermag. (Seite III.)

Einige wesentliche Punkte in der Analysis haben erst durch vollkommenere Ausbildung des Begriffes der irrationalen

Zahlen ihre Erledigung gefunden. Hinsichtlich dieses Begriffes bin ich, mit geringer Modifikation, der von Dedekind entwickelten Anschauungsweise gefolgt, welche am meisten der Natur der Sache entsprechen dürfte. (Seite IV.)

Die Gruppe aller Zahlen, deren n^{te} Potenz unter a liegt, ist immer genau definiert, gleichviel ob a sich als n^{te} Potenz einer andern Zahl darstellen läßt oder nicht, und besitzt folgende Eigenschaften:

1. die Gruppe umfaßt nicht alle Zahlen;
2. wenn die Zahl x zur Gruppe gehört, so gehören zu ihr auch alle kleineren Zahlen;
3. es gibt keine größte Zahl in der Gruppe.

Wir wollen jede Zahlengruppe, welche diese drei Eigenschaften besitzt, eine Zahlenstrecke oder auch kurz eine Strecke nennen. Wenn es unter den von einer Strecke ausgeschlossenen Zahlen eine kleinste b gibt, d. h. wenn die Strecke alle Zahlen, welche kleiner als b sind, und nur diese umfaßt, so wollen wir sagen, die Strecke werde durch b begrenzt, und eine solche Strecke eine Strecke mit Begrenzung oder auch eine rationale Strecke nennen. Die übrigen Zahlenstrecken, die Strecken ohne Begrenzung, nennen wir irrational. (Seite 2 und 3.)

Während die empirische Messung eine mit der Genauigkeitsgrenze sich ändernde Zahl ergibt, sucht die Mathematik allgemeingültige, von besonderen Beobachtungsverhältnissen unabhängige Regeln auf; dabei kann sie aber der irrationalen Zahlen nicht entbehren, wenn sie sich nicht auf ein ganz enges Gebiet beschränken will. Das einfachste hierher gehörige Beispiel aus der Geometrie ist die Aufgabe, die Länge der Diagonale OP des über der Längeneinheit errichteten Quadrats zu berechnen. Die Formel $OP = \sqrt{2}$ überhebt uns der Notwendigkeit, die Genauigkeitsgrenze des besonderen Falles zu kennen. (Seite 13 und 14.)

Die Ungenauigkeit der geometrischen Begriffe hat Herr F. Klein in einem Aufsatz „Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve“ (Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen, 8. Dezember 1873) zur Sprache gebracht und die sich daraus ergebenden Konsequenzen bezüglich der analytischen Darstellung der ebenen Kurven näher entwickelt. (Seite 188.)

Berichtigungen.

Seite 5 Z. 17 v. u. steht $> A_1$ statt $> A_2$, Seite 10 Z. 6 v. o. $\lambda = n:m$ statt $l = n:m$, Seite 17 Z. 5 v. u. $\alpha + \alpha'$ statt $a + a'$, Seite 18 Z. 5 v. u. μ_2 statt A^{μ_2}, Seite 20 Z. 11 v. o. $>$ statt $<$, Seite 22 Z. 8 v. u. unter dem Wurzelzeichen m statt A^m.

Seite 31 Z. 15 v. u. sind die f in g zu ändern. Seite 43 Z. 12 v. u. steht a statt b, Z. 1 v. u. $t_1 = t$ statt $t_1 - t$, Seite 48 Z. 8 v. o. $\varepsilon' y$ statt $\varepsilon' \gamma$, Seite 54 Z. 16 v. u. $a_1 < f(\xi) < a_2$ statt $b_1 < f(\xi) < b_2$, Seite 62 Fig. 14 a_1 statt a', Seite 65 Z. 11 v. o. x statt t, Seite 77 Z. 4 v. u. $(u + x)$ statt $(u + v)$, Seite 78 Z. 11 v. o. zuletzt v statt Δv, Seite 85 Z. 5 v. o. η' statt y', Seite 86 Z. 6 v. u. φ' statt ψ', ψ' statt φ'.

Seite 94 Z. 3 v. u. steht h statt h_1, Seite 96 Z. 16 v. o. km statt $(k-1)m$. Seite 98 Z. 1 v. u. ist hinzuzufügen: wenn das erste der beiden Integrale existiert. Seite 100 Z. 10 v. o. steht r_{i+1} und r_n statt h_{i+1} und h_n. Seite 101 Z. 13 v. u. steht w statt ω, Seite 121 Z. 4 v. u. das erste dx statt dy, Z. 1 v. u. $1 + x^2$ statt $1 - x^2$, Seite 123 Z. 8 v. o. negativ statt positiv.

Seite 126 Z. 10 v. u. steht das erste x_2 statt x_2, Seite 138 Z. 8 v. u. $\eta_1 \Delta a$ statt $-\eta_1 \Delta a$, Seite 140 Z. 4 v. o. gewisse statt gewöhnliche. Seite 143 Z. 5 v. o. steht O statt Q, Seite 148 Z. 8 v. o. br statt b_r.

Seite 152 Z. 8 v. o steht das erste $<$ statt $=$, Seite 155 Z. 4 v. u. a_1 und a_2 statt a_0, Seite 161 Z. 16 v. o. das erste q statt $q - 1$. Seite 169 Z. 11 v. o. steht ε statt ε_0, Seite 170 Z. 14 v. o. steht 3 statt 2, Seite 172 Z. 17 v. o. steht lim n statt n, Seite 176 Z. 11 v. u. $a_1 = b_1$ statt $a_1 - b_1$, Seite 178 Z. 7 v. o. zuletzt a statt r.

III.

Auszug aus dem Aufsatz „Über die Einführung der irrationalen Zahlen“

Mathematische Annalen 1892 Band 40 Seite 149 ff.

Vom rein analytischen Standpunkte aus kann man Erklärungen eines Begriffs, welche auf dessen Anwendung keine Rücksicht nehmen, als genügend anerkennen und sie sogar

andern Erklärungen vorziehen; nur wird dann in gewissen Fällen — und hierher gehört der Begriff der irrationalen Zahlen — eine besondere Auseinandersetzung darüber notwendig, wie der zunächst nur für die Benutzung innerhalb der Analysis zubereitete Begriff zu seiner tatsächlichen Anwendung außerhalb der Analysis gelangt. In dieser Weise bin ich selbst bezüglich der irrationalen Zahlen bei Abfassung der Schrift „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung“ verfahren. Späterhin jedoch habe ich der Erklärung eine andere Fassung zu geben gesucht.

Hat man die positiven und die negativen rationalen Zahlen eingeführt, so lassen sich zwischen zwei Zahlen beliebig viele Zahlen einschalten. Eine Zahlenmenge kann nun so beschaffen sein, daß jede Zahl, welche sich zwischen zwei Zahlen der Menge einschalten läßt, zu ihr gehört; eine solche Zahlenmenge möchte ich eine Schicht nennen, und zwar eine offene Schicht, wenn sie keine endliche rationale von Null verschiedene Schranke besitzt. Wegen der Ausdrücke „untere und obere Schranke“ siehe Mathematische Annalen 1887 Band 30 Seite 133.

Indem wir den von Dedekind eingeführten Ausdruck mit einiger Einschränkung gebrauchen, nennen wir jede Einteilung aller positiven (rationalen) Zahlen in zwei offene Schichten (untere und obere) einen Schnitt. Von da gelangen wir zu den irrationalen Zahlen. Diese Erklärungen haben aber einen wesentlich anderen Charakter, als die arithmetischen im engeren Sinne. Sie genügen nicht der von Kronecker aufgestellten Forderung; denn man besitzt kein Mittel, um zu erkennen, ob eine irgendwie definierte Zahlenmenge eine gegebene Zahl enthält, ob eine irgendwie definierte Schicht eine offene ist, usw.

Gewöhnlich macht man — stillschweigend oder ausdrücklich — die Annahme, daß jedem arithmetisch definierten Schnitt ein Verhältnis zwischen Linien entspricht, und ist dann berechtigt, jedem Schnitt unter Bezugnahme auf eine geometrische Aufgabe eine irrationale Zahl zuzuordnen. Abgesehen jedoch von den gegen diese Annahme an andrer Stelle (F. Klein, Sitzungsberichte der phys.-med. Soz. zu Erlangen, 8. Dez. 1873, wieder abgedruckt in den Mathematischen Annalen 1883 Band 22 Seite 249—259; F. Klein, Mathematische Annalen 1890

Band 37 Seite 571 f.; Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie 1882 Seite 126, sowie Mathematische Annalen 1887 Band 30 Seite 129) geltend gemachten Bedenken, kann man überhaupt fordern, daß hier jede Annahme, zumal jede außerhalb der Analysis gelegene, wenn möglich vermieden werde. Wenn nun ein beliebiger Schnitt vorliegt, so kann man sich in der Tat, unter Einführung eines dem Schnitt zugeordneten Zeichens s, der Redeweise: $\mathfrak{A}$ ist kleiner (größer) als $s\mathfrak{B}$, bedienen, ohne darüber zu urteilen, ob es einen Gegenstand gibt, der gleich $s\mathfrak{B}$ zu nennen wäre; denn man braucht jene Redeweise nur dahin zu verstehen, daß $\mathfrak{A}$ gleich $q\mathfrak{B}$ oder kleiner (größer) als $q\mathfrak{B}$ ist, wo q eine Zahl aus der unteren (oberen) Schicht des Schnittes und $\mathfrak{B}$ eine Benennung bedeutet. Auch ist stets — und das genügt für die Anwendungen — eine Aussage möglich von der Form: $\mathfrak{A}$ ist mit gewisser Genauigkeit gleich $s\mathfrak{B}$; wenn nämlich $\mathfrak{A}$ zwischen $r\mathfrak{B}$ und $t\mathfrak{B}$ so eingeschlossen werden kann, daß die Zahl r der unteren, t der oberen Schicht des Schnittes angehört und die Differenz $t - r$ eine gewisse Kleinheit besitzt.

Daß derartige Ausdrucksweisen sich eingebürgert haben, beruht auf dem Bedürfnis, möglichst viele Fälle unter eine und dieselbe sprachliche Form zu bringen. Eine Notwendigkeit aber war nicht vorhanden, und man könnte — wie Kronecker ausgesprochen hat — „die Modifikationen und Erweiterungen des Zahlbegriffs wieder abstreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlaßt worden sind“ (Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller gewidmet, 1887, Seite 265; Journal für die reine und angewandte Mathematik 1887 Band 101 Seite 339).

IV.

Auszug aus der akademischen Festrede „Über den Bildungswert der Mathematik“

Gießen 1894.

Indem jeder von uns zu fördern sucht, was ihn erfüllt und ihm das Höchste ist, wirkt er für das Ganze. Wie weit aber gehen unsre Wege auseinander; wie ungleich ist die Teil-

nahme, welche den verschiedenen Gebieten unsrer Arbeit von den ferner Stehenden entgegengebracht wird! Auf breiter Grundlage von Erfahrungen und Bedürfnissen, die das Leben uns täglich zum Bewußtsein bringt, bauen die einen von uns und kehren immer wieder von neuem zur Beobachtung und zur Anwendung zurück. Andre entfernen sich von dieser Quelle so rasch und so stetig, daß der Laie an den Zusammenhang nicht mehr glaubt, ja daß sie selbst die Ausgangspunkte beinahe aus den Augen verlieren. Dies ist heutzutage das Schicksal des Mathematikers.

Das Volk, welches die Kunde von Zahl und Form zur Wissenschaft erhob, nannte sie Mathesis — Wissenschaft schlechthin — und erblickte in ihr die Grundlage aller tieferen Verstandesbildung. In der Gegenwart wird niemandem die Bildung deshalb abgesprochen oder bemängelt, weil er von Mathematik nichts weiß und sich nichts vorstellen kann. Worin ist dieser Wechsel begründet, wie weit ist er berechtigt? Das sind Fragen, über welche zu reden mir als Mathematiker Bedürfnis ist bei einer Veranlassung, wo die Verantwortlichkeit, welche sich an öffentliches Wirken knüpft, lebhafter als je empfunden wird.

Wenn es wahr ist, daß alle wissenschaftliche Arbeit wenigstens mittelbaren oder späten Ertrag für die Menschheit bringt, so gewährt doch dieser Gedanke noch keine volle Befriedigung gegenüber unserem natürlichen Sehnen, von einer unserem Arbeitsaufwand entsprechenden Wirkung uns selbst überzeugen und uns daran erfreuen zu können. So kann es also dem, der die Mathematik an der Universität zu pflegen hat, nicht gleichgültig sein, welchen Beitrag er liefert zur allgemeinen Bildung seiner Zeit. Denn an den technischen Hochschulen, an denen der Betrieb der Mathematik in hoher Blüte steht, liegen die Verhältnisse doch anders, als an den Universitäten, wo die spezielleren Teile der Mathematik im wesentlichen vor den künftigen Lehrern unsrer höheren Schulen vorgetragen werden. Die Ausbildung dieser Lehrer ist es demnach hauptsächlich, wodurch wir auf unsre Zeit Einfluß zu üben haben. Nun entfernt sich aber der akademische Lehrstoff von dem, was der spätere Beruf des Studierenden unmittelbar beansprucht, in keinem Fache so weit, wie in der

Mathematik. Der bildende Wert wird also nicht bloß in dem Lehrstoff selbst, in der Aufnahme der einzelnen Kenntnisse zu suchen sein, sondern ebensosehr in dem Verfahren, das überall zur Geltung kommt. Das Verfahren aber ist so überwiegend die Deduktion, daß wir mit dieser uns hier zunächst allein zu befassen haben.

Gewiß bedienen wir uns der reinen Deduktion auf allen Gebieten, im täglichen Leben nicht minder als in den Wissenschaften und bei denjenigen Beschäftigungen, für welche wissenschaftliche Schulung vorausgesetzt wird. Nirgends aber herrscht diese reine Deduktion mit solcher Ausschließlichkeit, wie in der Mathematik, die ihr besonderes Gepräge eben dadurch erhalten hat. Wie schnell würde selbst unsre nächste Nachbarin, die Astronomie, sich zur Unfruchtbarkeit verurteilt sehen, wenn sie gleich uns versuchen wollte, von irgendwelchen Grundlagen aus durch Schlußfolgerungen allein ihren Stoff weiter zu spinnen! Mit Recht mag man daher von mathematischem Denken, von mathematischer Beweisführung sprechen als von einer Methode, die mit keinem anderen Wissensstoff innerlich verbunden ist, während sie bei dem von der Mathematik behandelten Stoffe sich von selbst aufdrängt und für sich allein ausreicht, um der Forschung unerschöpfliche Fruchtbarkeit zu sichern.

Zwar konnten die ersten Anfänge nicht auf diesem Wege gewonnen werden. Zuerst muß jede Wissenschaft Angeschautes sammeln und verarbeiten. Demgemäß ist auch nicht zuerst der abstraktere Teil der Mathematik, die Lehre von den Zahlen, ausgebildet worden, sondern die Geometrie, die Erdmeßkunst und Meßkunst überhaupt, welche sich bald zur Lehre von Maß und Gestalt erweiterte. Und hier mußte man allmählich inne werden, daß es möglich war, auf einem sicheren Wege zu neuen geometrischen Wahrheiten zu gelangen, ohne daß Beobachtungen gemacht oder Versuche angestellt wurden. Die so gefundenen Wahrheiten nannte man Theoreme, Lehrsätze. Die Richtigkeit eines jeden Lehrsatzes wird durch einen besonderen Beweis festgestellt. Der Beweis nimmt auf die vorangegangenen Sätze Bezug; was in diesen Sätzen nicht niedergelegt ist, darf in den Beweis nicht verflochten werden. Ist ein derartiger Beweis des Lehrsatzes erbracht, so steht der

Satz unumstößlich fest für jeden, der die vorhergegangenen Sätze anerkennt. Indem nun die Mathematik von einer gewissen Stelle an nur Lehrsätze, Sätze mit streng deduktiven Beweisen, duldet, gewinnt sie den hohen Grad von Zuverlässigkeit, wegen dessen man von mathematischer Gewißheit zu sprechen pflegt. Sie beginnt mit einer Reihe von einfachen Aussagen, die unsre unmittelbare Anerkennung beanspruchen; haben wir uns mit diesen Grundwahrheiten vertraut gemacht, so müssen die daraus hergeleiteten Lehrsätze uns als unanfechtbar erscheinen, wie verwickelt ihr Inhalt auch sein mag.

Wenn man also Mathematik lernt, so wird nichts weiter verlangt, als daß man erstens gewisse Grundwahrheiten — Grundsätze, Axiome — einsieht, und daß man zweitens folgerichtig weiterdenkt, d. h. Schritt für Schritt nur solche Aussagen aufnimmt, die sich aus vorhergegangenen mit Notwendigkeit ergeben. Dazu genügt aber, daß man die Sprache richtig versteht, und zwar nur diejenigen Bestandteile der Sprache, welche allen Denkgebieten gemein sind. Die Begriffe, welche besonderen Denkgebieten, z. B. der Naturbeschreibung, angehören, kommen nicht in Frage; die der Mathematik selbst eigentümlichen Begriffe aber spielen ihre Rolle bei den mathematischen Beweisen nicht vermöge ihrer sprachlichen Bedeutung, sondern vermöge der Festsetzungen, die über sie getroffen werden. Solche Festsetzungen sind zunächst die Axiome. Durch diese werden Beziehungen ausgesprochen, welche zwischen den einfachsten mathematischen Begriffen, den Grundbegriffen, bestehen. Im weiteren Verlauf werden zahlreiche neue Begriffe eingeführt, Begriffe von zusammengesetzter Art. Jeder zusammengesetzte Begriff muß definiert, d. h. über seine mathematische Bedeutung muß eine genau umgrenzte Festsetzung getroffen werden. Und nur auf diese Festsetzung, auf die Definition des Begriffs, darf man bei seiner Anwendung sich berufen; jede Hineinmischung sonstigen Sprachgebrauchs ist unzulässig.

Viele Jahre wird der Schüler zu solchem Denken angeleitet, das im Grunde nur auf die Betätigung deutlichen Sprachgefühls hinauskommt. Muß man da nicht erwarten, daß der Hochschule in formaler Beziehung nichts mehr zu tun übrigbleibt, daß die Studierenden durchweg zwar nicht Gewandtheit in der

mathematischen Erfindung, aber gefestigtes Urteil über folgerichtigen Gedankengang auf die Hochschule mitbringen? Die Erfahrung entspricht dieser Erwartung nicht. Wenn mit dem Unterricht in den Elementen der Mathematik die Absicht verbunden wird, den Schüler zu logischem Denken und Sprechen zu erziehen, so wird diese Absicht im allgemeinen nicht erreicht.

Die von der Schule angestrebte mathematische Ausbildung kann bekanntlich bei einem Teile der Schüler nicht erzielt werden. Auch von denjenigen Schülern, deren mathematische Leistungen für genügend erklärt werden müssen, kann man nicht sagen, daß ihnen die Methode in Fleisch und Blut übergegangen sei. Sehen wir uns in allen Berufsarten nach den Männern um, welche die höheren Schulen durchgemacht haben. Von einer tieferen Einwirkung des genossenen mathematischen Unterrichts werden wir da bei näherer Prüfung wenig bemerken. Darf man für diese Erscheinung ohne weiteres die Beschaffenheit des Unterrichts verantwortlich machen? Ist dieselbe nicht vielmehr in erster Linie dadurch zu erklären, daß der menschlichen Natur das mathematische Denken im Grunde zuwiderläuft? Ich meine hier nicht sowohl das Denken über mathematische Gegenstände, wie die Form des Denkens, welche an mathematischen Gegenständen geübt werden soll.

Nicht der sich selbst zügelnde Verstand, sondern die ungezwungen arbeitende Einbildungskraft ist es, woraus unsre Gedanken mit Ursprünglichkeit hervorgehen. Gegenüber den mannigfaltigen Ansprüchen des Lebens sind wir auf rasches Ergreifen und Handeln zu sehr angewiesen, um uns willig dem Zwange behutsamen Urteilens und peinlichen Prüfens zu überlassen. Auch diejenigen, welche besondere Anleitung dazu genossen haben, ja, welche mit Denkarbeit vorzugsweise beschäftigt sind, lösen sich von diesem Zwange gern, wo sie die Notwendigkeit desselben nicht lebhaft empfinden: und sie bleiben vielleicht gerade dadurch genießbarer für die übrigen Menschen, wirksamer in ihrer ganzen Persönlichkeit. So übt selbst der gereifte Mensch wesentlich nur innerhalb des Berufs oder unter bedeutsameren Eindrücken die Selbstbeschränkung, ohne welche exaktes Auffassen, Darstellen und Schließen nicht möglich ist.

„Unsere ganze Würde besteht im Denken. Bemühen wir uns also, richtig zu denken. Das ist der Anfang der Moral.“ So schrieb ein Mann, dessen Weltweisheit nicht geringer war, als sein mathematisches Genie. Aber da der Mensch zum richtigen Denken sich eben nicht leicht selber erzieht, so muß durch Unterweisung frühzeitig eingewirkt werden. Die Schule übernimmt es, die Verstandestätigkeit des Knaben in die rechte Bahn zu gewöhnen. Daß sie diesem Zwecke den mathematischen Unterricht in hervorragendem Maße dienstbar zu machen sucht, ist natürlich; daß aber kein entsprechender Erfolg verzeichnet werden kann, darf nicht verwundern. Denn wenn die Verstandesübung in ihrer strengsten Form überhaupt eine durchaus besondere Empfänglichkeit voraussetzt, so konnte es am wenigsten gelingen, schon die mittleren Jahrgänge der Schüler für solche Übung durch einen Stoff zu gewinnen, bei dem die tatsächliche Erkenntnis zu dem logischen Aufwand in so ungünstigem Verhältnis steht, wie bei den ersten Elementen der Mathematik. Betrachten wir dieses Verhältnis etwas näher.

Der Mathematiker — so sagt man — gibt für alles, was er behauptet, einen Beweis; und das trifft zu, wenn man die Axiome nicht einbezieht. Aber als ein Beweis gilt dem Mathematiker nicht jedes Verfahren, aus welchem man die Überzeugung von der Richtigkeit einer Behauptung schöpft, sondern nur das bereits geschilderte Verfahren, welches Schlußfolgerungen aus den vorher anerkannten Sätzen ohne Lücke aneinanderfügt. Nun wird bei einigermaßen verwickelten Dingen auch dem Laien einleuchten, daß kein Mittel zum Ziele führt und endgültige Gewißheit verschafft außer der mathematischen Deduktion. Handelt es sich dagegen um einfachere Dinge, z. B. um die Gleichheit zweier Scheitelwinkel, so wird der Laie sich gern mit einigen Proben begnügen und nach einem sonstigen Beweise schwerlich Verlangen tragen. Dennoch führt die Mathematik den deduktiven Beweis auch für die einfacheren Sätze, wo die Mühe unnötig erscheint. Also ist anzunehmen, daß bei dem Beweise nicht immer bloß die Absicht vorschwebt, den Satz glaubwürdig zu machen.

In der Tat unterscheidet sich der mathematische Beweis von anderen Beweisen nicht nur durch sein Wesen, sondern

auch durch seinen Zweck. Dieser Zweck ist ein doppelter. Ursprünglich kann der mathematische Beweis nur ein Mittel gewesen sein, neue Eigenschaften der Figuren und der Zahlen zu entdecken. Neue Eigenschaften aus schon bekannten herzuleiten und allein aus solchen zu beweisen, gelang nun in so reichem Maße und auf so überzeugende Art, daß man sich schließlich gewöhnte, andere Mittel in der reinen Mathematik nicht mehr zuzulassen. Die zur ausschließlichen Herrschaft gelangte Methode mußte aber notwendig auch rückwärts auf das Gebiet einwirken, wo man die Erkenntnisse nicht der Deduktion verdankte. Bei dem Aufbau des Systems ließ eine zufällige Abgrenzung sich nicht aufrecht erhalten; man mußte versuchen, mit deduktiven Beweisen hinterher auch solche Sätze zu versehen, deren Richtigkeit nicht mehr angezweifelt wurde. Der Beweis diente jetzt dem Zweck, darüber Aufschluß zu geben, welche Sätze in logischer Abhängigkeit von den übrigen Sätzen stehen. Der Kreis der Sätze, die ihre Unabhängigkeit noch behielten, zog sich immer enger zusammen; man bemühte sich, diese Sätze — die Grundsätze — auf eine möglichst geringe Anzahl und auf einen möglichst einfachen Inhalt zu beschränken, aus den Grundsätzen aber alle weiteren Sätze zu deduzieren, auch diejenigen, welche ohne solche Beweisführung bereits Anerkennung gefunden hatten.

Diese Arbeit — die Ergründung des gegenseitigen Zusammenhanges der gefundenen Sätze — dient nicht bloß der Befriedigung einer gelehrten Liebhaberei, sondern sie hat der Forschung fruchtbare Anregung gegeben und neue Wege eröffnet. Aber die Gesichtspunkte, welche hier den Fachmann leiten, und die Erfolge, welche seinem Verfahren noch weitere Rechtfertigung gewähren, sind für den Laien fernliegend und unzugänglich. Bereit, sich mit geringen Mitteln überzeugen zu lassen, kann er nicht begreifen, weshalb noch darüber hinaus logische Kunst aufgewendet wird. Wie soll vollends der Knabe in den mittleren Schulklassen sich für schwerfällige Beweise erwärmen, wo sie ihm entbehrlich dünken! Er wird sich empfänglicher zeigen und mehr gefördert werden, wenn man ihn mit logischen Exerzitien an mathematischem Stoff

möglichst lange verschont, die verschiedenen Unterrichtsstoffe jedoch nach Kräften benutzt, um das Denk- und Darstellungsvermögen während seines zarten Entwickelungszustandes zu stärken und zu schulen.

Bereits hat die Einsicht, daß nach dieser Richtung Wandel geschaffen werden muß, sich Bahn gebrochen. Trotzdem habe ich bei dem betreffenden Teile der Mathematik noch zu verweilen, um eine andere Seite der Sache zu erörtern. Um es gleich auszusprechen: für die Anfangsgründe der Mathematik, mit denen man die Schüler in den ersten Jahren beschäftigt, gibt es noch keine hinreichend anerkannte logische Darstellung. Verhältnismäßig klein ist die Anzahl der Lehrgänge, denen man nicht in Hauptpunkten Widersprüche, Lücken oder leere Redensarten vorwerfen kann. Und es ist sogar in dieser Hinsicht ein Rückschritt gegen die antiken Muster zu verzeichnen.

Die antike Auffassung hat ihre Verkörperung gefunden in den Elementen des Euklid. In diesem bewunderungswürdigen Werke, einem dauernden Denkmal griechischer Gestaltungskraft, ist der Vortrag der Mathematik nach den Gesichtspunkten, welche ich oben auseinandergesetzt habe, und welche damals bereits als maßgebend anerkannt waren, streng gegliedert. Aber jedes neue Geschlecht sieht mit neuen Augen. Die spätere Kritik fand Euklids Axiome nicht mehr ausreichend, seine Grundbegriffe nicht mehr einleuchtend. Die Spekulation drang in die Mathematik ein und raubte ihr das scharfe, einfache Gepräge, indem sie Vorstellungen hineintrug, die endlose Kontroversen heraufbeschworen. So hat sich allmählich der Zustand entwickelt, daß die Anfangsgründe der Mathematik in denjenigen jüngeren Darstellungen, welche wissenschaftlich sein wollen, meist nicht als eine für Schüler der mittleren oder selbst der oberen Klassen geeignete geistige Nahrung gelten dürfen. Soweit sie Richtiges bieten, müssen sie an die Urteilsreife des Lernenden oft zu hohe Anforderungen stellen; überwiegend aber bieten sie nicht das Richtige, sondern eher eine Menge von anfechtbaren Gedankengängen.

Dieser Vorwurf gegen eine aus ernster Arbeit hervorgegangene, ausgedehnte Literatur klingt hart. Er verliert aber an Härte für den, der die entgegenstehenden Schwierigkeiten

erkennt, — Schwierigkeiten, welche ebensosehr in der äußeren Form der Überlieferung begründet sind, wie in dem Stoffe selbst. Der Sprache, in der wir heutzutage die Mathematik überliefert finden, fehlt die Reinheit, durch welche die Alten sich auszeichnen und uns Vorbilder bleiben. Zwar an die Begriffserklärungen, mit denen die einzelnen Bücher der Elemente des Euklid anheben: die Erklärungen des Punktes, der Linie, der Ebene usw. — mag man hier weniger denken; aber man kann diese Erklärungen überhaupt fortlassen, weil sie eigentliche Definitionen zu sein gar nicht berufen sind. Die mathematische Definition eines Begriffes ist etwas, was unmittelbar oder mittelbar herangezogen werden muß, so oft man den Begriff benutzt. Wenn Euklid aber beispielsweise erklärt, daß eine Linie Länge ohne Breite sei, so gibt es keine Stelle, wo er diese Erklärung heranziehen könnte, um etwas damit zu begründen. Erklärungen dieser Art können nur den Zweck haben, die Vorstellungen, welche der Leser von den mathematischen Grundbegriffen mitbringt, schärfer zu umgrenzen. Im übrigen würde für den Aufbau des Systems eine bloße Aufzählung der Grundbegriffe an Stelle jener Erklärungen, die in dem System tatsächlich nicht zur Verwendung kommen, sehr wohl genügen. Wenn wir nun das System für sich betrachten, so erscheint sein Gefüge wie etwas Vollkommenes. Die Ausdrucksweise ist schlicht und deutlich, die Aneinanderreihung der Gedanken durchsichtig, indem bei der Beweisführung alle Glieder der Schlußkette, die der Verfasser sich selbst zum Bewußtsein gebracht hat, ruhig vor dem Leser ausgebreitet werden.

Wie steht es nun in der neueren Zeit?

Die Mathematik ist nicht mehr davor sicher, für eine Wissenschaft gehalten zu werden, in welcher die bloß begriffliche Spekulation ein unheimliches Wesen treibt. Da wird erörtert, ob der Raum unendlich oder unbegrenzt oder beides zugleich sein mag. Man spricht von Dimensionen, die dem Raume beizulegen seien, ohne daß jemand weiß, was diese Dimensionen sind. Die gerade Linie wird zwar durch Definitionen vor der Begegnung mit parallelen Linien gesichert; hinterher aber muß sie sich nachsagen lassen, daß sie die parallelen Linien im Unendlichen schneidet. Es treten irratio-

nale Zahlen auf, die Zahlen sein sollen, und die doch nicht genau — also im Grunde überhaupt nicht — angegeben werden können; imaginäre Zahlen, die eigentlich nicht vorhanden sind, die aber durch Formeln dargestellt und flott in Rechnung gebracht werden. Und so kann man in der heutigen Mathematik oft in Zweifel geraten, ob es sich um wirkliche oder bloß um eingebildete Dinge handelt.

Es versteht sich aber wohl von selbst, daß wir es zum großen Teile mit Ausdrücken zu tun haben, die nicht in eigentlicher Bedeutung zu nehmen sind, sondern in einem übertragenen Sinne verstanden sein wollen. In der Tat: Vieles in der Mathematik, was keinen Sinn zu haben oder einen inneren Widerspruch zu enthalten scheint, hat ernste Bedeutung und Berechtigung. Aufschluß darüber zu erlangen, ist freilich meist schwer, manchmal insofern unmöglich, als die in unsrer Literatur anzutreffenden Erklärungen weder erschöpfend noch zuverlässig sind. Der Kundige handhabt die übertragenen Ausdrücke und Redewendungen mit Sicherheit und macht sie nutzbar, wie Werkzeuge, in denen weittragende Erkenntnisse sich verkörpern.

Von den sprachlichen Bildungen jedoch, welche durch den ihnen zukommenden, wenn auch übertragenen Sinn ihre Rechtfertigung finden, ja deren Dasein einen Fortschritt der Wissenschaft zum Bewußtsein bringt, sind die Ausdrücke wohl zu unterscheiden, welche, durch ungesunde Einflüsse in die Mathematik hineingetragen, einen Rückschritt darstellen, der seiner Überwindung große Zähigkeit entgegensetzt. Ich nenne nur Begriffe wie Raum und Dimension; eine größere Anzahl von Beispielen vorzuführen, hält schwer, weil es sich nicht sowohl um einzelne Begriffe, wie um Redewendungen handelt, und mithin der ganze Zusammenhang in Betracht gezogen werden müßte. Diese Bemerkung führt mich von der Betrachtung der Ausdrucksweise zu der der gesamten Darstellungsweise in der neueren Zeit.

Altes und Neues steht auch hier in schroffem Gegensatz. So sehr die alte Darstellungsweise dem Leser das Urteil über die Richtigkeit des Inhalts erleichtert, so sehr wird durch die neuere das Urteil erschwert. Wenn Euklid einen Satz beweist,

so gibt er die Schritte, aus denen er den Beweis zusammengesetzt hat, ebenso vollständig an, wie er entbehrliches Beiwerk gewissenhaft vermeidet. Ich spreche von den Schritten, aus denen er den Beweis zusammengesetzt hat, nicht von den Schritten, aus denen der Beweis wirklich zusammenzusetzen ist. Denn auch einem Euklid ist es nicht gelungen, die erforderlichen Schritte immer ohne jede Lücke zu erkennen und zu würdigen. Die zurückgebliebenen Lücken sind sogar von verhängnisvoller Bedeutung, und der Versuch, sie auszufüllen, bringt einen Teil des Gebäudes zum Wanken. Aber es bleibt ein unschätzbarer Vorzug, daß die Irrtümer nirgends verschleiert sind, sondern rein zutage treten.

Von dieser Durchsichtigkeit haben wir uns weit entfernt. Verschiedene Ursachen haben zusammengewirkt, um der mathematischen Literatur ein anderes Gesicht zu geben. Das Anwachsen des Stoffes drängte zu größerer Kürze; die Erfindung der Rechnung mit Unendlichkleinem und Unendlichgroßem brachte eine Fülle von neuen Vorstellungen, die erst nachträglich gesichtet werden konnten; und gewiß machten sich auch Veränderungen geltend, welche der Geschmack hinsichtlich der Darstellungskunst überhaupt erfahren hat. In der neueren Zeit sieht man zwei Strömungen nebeneinander herlaufen Die eine führt weiter ab von der antiken Strenge und Klarheit; die andere strebt danach, diese wieder zu erreichen, ja zu übertreffen; und vielfach kann man eine gleichzeitige Einwirkung beider Strömungen beobachten. Man darf aber behaupten, daß uns in die Forderungen, welche an mathematische Strenge zu stellen sind, eine tiefere Einsicht eröffnet ist, als irgend einem früheren Geschlecht. Eine Periode gewaltiger Arbeit hat weite Gebiete der Mathematik von lange festgehaltenen Irrtümern befreit und sie auf gefestigter Grundlage zu neuer Fruchtbarkeit emporgehoben. Schärfer als je ist uns vorgezeichnet, wie Begriffe zu bilden und zu verknüpfen sind. Die Feinheit der Auffassung hat ihren Höhepunkt erreicht in dem von Kronecker aufgestellten Prinzip, daß alle Zweige der Mathematik nach dem Muster der reinen Arithmetik gestaltet werden müssen. Die Arithmetik oder Zahlentheorie beschäftigt sich zunächst mit den Zahlen im engsten Sinne des Wortes,

den natürlichen, weiter den ganzen Zahlen und mit Aufgaben, welche durch ganze Zahlen gelöst werden sollen. Das, was im elementaren Rechenunterricht unter dem Namen der vier Spezies gelehrt wird, bildet für die Zahlentheorie nicht bloß den Ausgangspunkt, sondern alle, auch die kompliziertesten Operationen dieser Disziplin setzen sich einzig und allein aus jenen vier Rechnungsarten zusammen, welche dabei bald in geringerer, bald in größerer, aber stets in begrenzter Anzahl verknüpft werden. Der vollkommensten Einfachheit ihres Stoffes verdankt es die Arithmetik, daß sie sich von den Abwegen hat fernhalten können, auf welche alle andern mathematischen Disziplinen geraten sind. Und in die kristallklare Form, welche wir in der Arithmetik vor Augen haben, muß nach Kronecker alle Mathematik gegossen werden.

Unter dem Einfluß dieser ganzen Richtung steht jeder heutige Mathematiker. Aber sie hat nicht in dem Sinne durchgreifend gewirkt, daß unsre gesamte Literatur sich nunmehr wirklich in der vorgezeichneten Bahn bewegte. Das tut vielmehr nur der kleinere Teil der Literatur. Wohl sind bestimmte Irrtümer dauernd überwunden, aber ihre Quelle ist nicht verstopft. Die Notwendigkeit, bei allen mathematischen Betrachtungen in lückenlosen Schritten vorwärtszugehen, wird durch die Geschichte jener Irrtümer eindringlich dargetan, aber diese Erkenntnis scheint zu nüchtern, um sich der Geister vollkommen bemächtigen zu können. Vorstellungen, über die gleichsam ein Schleier gebreitet ist, heben nicht bloß den Reiz und die Wirksamkeit der Darstellung: sie leisten sogar dem Forscher bei seinem tastenden Suchen oft vortreffliche Dienste. Mögen sie also immerhin als Zutat eine Stelle finden; der Kern der Sache jedoch muß davon freigehalten werden. Eigentümlich ist es, daß vielfach gerade die Schriften, welche über Prinzipienfragen Licht verbreiten wollen, die Grundbedingungen der Deutlichkeit und Folgerichtigkeit nicht erfüllen. Zur Beleuchtung dieser Verhältnisse diene ein Beispiel. Von alters her wurde angenommen, daß zu einer beliebigen Geraden durch jeden Punkt eine Parallele gezogen werden kann, und zwar nur eine einzige. Euklid hat die Geometrie mit Hilfe eines Axioms aufgebaut, das auf diese Annahme hinausläuft. Spätere

haben sich bemüht, dieses Axiom durch andere Axiome zu ersetzen oder gar zu einem Lehrsatz zu erheben, bis man den Versuch machte, die Annahme zu streichen und die Geometrie ohne dieselbe zu begründen. Der Versuch gelang, und es kam die sogenannte Nichteuklidische Geometrie zustande, in welcher das Euklidische Axiom und mithin die übliche Parallelentheorie nicht gilt. Die Tatsachen der Erfahrung sah man weder der Euklidischen noch der Nichteuklidischen Geometrie widersprechen. Dennoch könnte ein derartiges System einen inneren Widerspruch enthalten und dadurch mathematisch unhaltbar werden; denn die Erfahrung bezieht sich nur auf angenäherte Brauchbarkeit, die mit gewissen inneren Widersprüchen wohl vereinbar ist. Daß nun die Euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist, hat man von jeher versichert. Dafür aber, daß die Nichteuklidische Geometrie keinen Widerspruch enthält, mußte ein ausdrücklicher Beweis gefordert werden, was im Grunde auch von der Euklidischen Geometrie gilt. Die Prüfung der hierüber angestellten Untersuchungen wird nun bei einem Teile dadurch illusorisch, daß schon die Voraussetzungen, von denen bei einer so delikaten Untersuchung doch alles abhängt, nicht klipp und klar ausgesprochen sind. Der geforderte Beweis könnte auf analytischer Grundlage geführt werden. Dadurch wäre die Frage wenigstens für diejenigen erledigt, welche die Widerspruchsfreiheit der Analysis als etwas Notwendiges betrachten.

Ich habe zu schildern versucht, wie in unserm Jahrhundert neben außerordentlicher Verfeinerung des mathematischen Verfahrens sich eine weitgehende Zwanglosigkeit behauptet. Unverkennbar hängt mit dieser Erscheinung die Lebendigkeit und der Reichtum der modernen mathematischen Produktion zusammen. Aber aus ihr erklärt sich — wenigstens zum Teil — die gegenwärtige Unzulänglichkeit der einführenden Lehrbücher, auf die ich hingewiesen habe als auf eine der Ursachen, weshalb der mathematische Unterricht nicht die formal bildende Wirkung hat, die so nahe zu liegen scheint. Schon diese Verhältnisse rechtfertigen es, wenn man auf der Schule die abstrakte Behandlung der Mathematik möglichst hinausschieben und die Grundlehren empirisch behandeln will. Den Wert des abstrakten

Denkens wird der jugendliche Geist um so eher begreifen, je sparsamer dasselbe angewendet wird, und je mehr die Anschauung ihr natürliches Recht behält. Und das gilt nicht bloß für die Schule, wo man mit denen rechnen muß, die für Mathematik nicht empfänglich sind; es gilt in gewissem Grade noch für den engeren Kreis derer, die auf der Universität ihre Ausbildung suchen, um sich der Mathematik ganz oder vorzugsweise zu widmen. Diesen Studierenden müßte, um ihre mathematische Urteilskraft zu völliger Reife zu erheben, die Mathematik in einer Gestalt vorgeführt werden, die bis ins kleinste folgerichtig ist. Eine derartige Darstellung ist aber nur teilweise durchführbar; einmal, weil ausgedehnte Teile des Stoffes nicht in der geeigneten Form vorliegen; sodann, weil man notgedrungen die Konzentration und den Zeitaufwand berücksichtigen muß, den die Erfüllung der theoretischen Anforderungen beansprucht. Soll die Erwerbung von Kenntnissen und die Übung in ihrem selbständigen Gebrauch nicht zu kurz kommen, so muß man sich großenteils mit Methoden begnügen, die dem antiken Ideal nicht entsprechen.

Trotz der neuen Belebung dieses Ideals ist eben der Stoff zur Hauptsache geworden. In der Überfülle dieses Stoffes verschwindet das, was allgemeine Teilnahme erwecken könnte durch seine unmittelbare Bedeutung für das Leben und für das Verständnis der Natur. Das anschauungslose Denken aber, das in der Mathematik seine äußerste Ausbildung findet und in ihr seine höchste Leistungsfähigkeit entfaltet, kommt auf anderen Gebieten nur in beschränktem Maße zur Geltung. Um für dieses Maß zu erziehen, kann die Mathematik wohl mitwirken, aber nur durch die einfacheren Lehren, wenn es gelingt, sie rein herauszuschälen.

Der Inhalt ist unvergänglich, die Form aber veränderlich und zwischen Extremen wechselnd.

Sachregister.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

Druck von B. G. Teubner in Dresden

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Repertorium der höheren Mathematik (Difinitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise) von **Ernst Pascal**, ord. Professor an der Universität Pavia. Deutsche Ausgabe von weil. A. Schepp in Wiesbaden. 2. neubearb. Aufl. In zwei Teilen: **Analysis und Geometrie.** gr. 8. **I. Teil:** Die Analysis. Herausgegeben von **P. Epstein.** [ca. 700 S.] 1909. In Leinwand geb. ca. n. ℳ 12.— (Erscheint im Januar 1909.) **II. Teil:** Die Geometrie. Herausgegeben von **H. E. Timerding.** [ca. 800 S.] 1909. In Leinwand geb. ca. n. ℳ 14.— [Erscheint Ostern 1909.]

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser imstande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann. Für den Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademekum" sein, in dem er, kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will. Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht.

Vocabulaire Mathématique, français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Von Professor Dr. **Felix Müller.** [XV u. 316 S.] Lex.-8. 1900/1901. In Leinw. geb. n. ℳ 20.— Wurde in 2 Lieferungen ausgegeben: I. Lieferung. [IX u. 132 S.] 1900. Geh. n. ℳ 8.— II. Lieferung. [S. IX—XV u. 133—316.] 1901. Geh. n. ℳ 11.—

Das Vokabularium enthält in alphabetischer Folge mehr als 12000 Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik in französischer und deutscher Sprache und soll in erster Linie eine Ergänzung der gebräuchlichen Wörterbücher für die beiden genannten Sprachen sein. Da das Vokabularium zugleich als Vorarbeit zu einem Mathematischen Wörterbuche dienen soll, so sind auch zahlreiche Nominalbenennungen aufgenommen, deren Anführung aus rein sprachlichem Interesse überflüssig erscheinen dürfte. Z. B. Gaußsche Abbildung (einer Fläche auf eine Kugel) (Gauß 1827) [inf. Geom.] représentation de Gauss; Clairauts Satz (über die geodätischen Linien auf Umdrehungsflächen) (Clairaut 1733) [inf. Geom.] théorème de Clairaut. Aus den beigefügten Zusätzen ist zu ersehen, daß das Vokabularium mehr bietet, als der Titel erwarten läßt.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von **Moritz Cantor.** In 4 Bänden. gr. 8. **I. Band.** Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Aufl. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] 1907. Geh. n. ℳ 24.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 26.— **II. Band.** Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2. verb. u. verm. Aufl. Mit 190 Figuren im Text. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. Geh. n ℳ 26.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 28.— **III. Band.** Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2. verb. u. verm. Aufl. Mit 146 Figuren im Text. [X u. 923 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. ℳ 25.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 27.— **IV. Band.** Vom Jahre 1759 bis zum Jahre 1799. Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren **V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti,** und **C. R. Wallner** von **M. Cantor.** Mit 100 Figuren im Text. [VI u. 1113 S.] 1908. Geh. n. ℳ 32.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 35.—

„Einen hervorragenden Platz unter den neueren Veröffentlichungen über die Geschichte der Mathematik nimmt die zusammenfassende Darstellung ein, die uns Moritz Cantor geschenkt hat.

Mit rastlosem Fleiß, mit nie ermüdender Geduld, mit der unverdrossenen Liebe des Sammlers, der auch das scheinbar Geringe nicht vernachlässigt, hat Moritz Cantor dies kolossale Material gesammelt, kritisch gesichtet, durch eigene Forschungen ergänzt, nach einheitlichen Grundsätzen und einheitlichem Plan zu einem Ganzen verschmolzen, und indem er in seltener Unparteilichkeit bei strittigen Fragen, deren die Geschichte der Mathematik so viele hat, auch die abweichenden Ansichten zu Wort kommen ließ, hat er ein Werk geschaffen, das die reichste Quelle der Belehrung, der Anregung für einen jeden ist, der sich über einen geschichtlichen Fragepunkt Rat holen, der an der Geschichte der Mathematik mitarbeiten will...."

(Aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen.)